

Colle n°7 : Semaine du 13 novembre 2023

Fonctions à valeurs vectorielles

Ce chapitre permet aussi de revoir les notions sur les fonctions de \mathbb{R} dans \mathbb{R} vues en MPSI (comme théorème des accroissements finis, inégalité des accroissements finis, formule de Leibniz ...)

Ce chapitre poursuit deux objectifs :

- étendre le programme d'analyse réelle de première année au cadre des fonctions vectorielles ;
- fournir des outils pour l'étude des équations différentielles linéaires et du calcul différentiel ;

Les fonctions sont définies sur un intervalle I de \mathbb{R} , à valeurs dans un espace normé de dimension finie E .

Contenus	Capacités & Commentaires
a) Dérivabilité en un point	
Dérivabilité en un point.	Définition par le taux d'accroissement, caractérisation par le développement limité à l'ordre 1. Interprétation cinématique. Traduction par les coordonnées dans une base de E .
Dérivabilité à droite et à gauche d'une fonction en un point.	
b) Opérations sur les fonctions dérivables	
Combinaison linéaire de fonctions dérivables. Dérivabilité et dérivée de $L \circ f$, où L est linéaire. Dérivabilité et dérivée de $B(f, g)$, où B est bilinéaire, de $M(f_1, \dots, f_p)$, où M est multilinéaire. Dérivabilité et dérivée de $f \circ \varphi$ où φ est une fonction réelle de variable réelle et f une fonction vectorielle. Applications de classe \mathcal{C}^k . Opérations sur les applications de classe \mathcal{C}^k .	Cas du produit scalaire, du déterminant
c) Intégration sur un segment	
Intégrale d'une fonction f continue par morceaux sur un segment de \mathbb{R} . Linéarité de l'intégrale. Relation de Chasles. Pour L linéaire, intégrale de $L(f)$. Inégalité $\left\ \int_a^b f \right\ \leq \int_a^b \ f\ $ Sommes de Riemann associées à une subdivision régulière.	Notations $\int_{[a,b]} f, \int_a^b f, \int_a^b f(t) dt$
e) Intégrale fonction de sa borne supérieure	
Dérivation de $x \mapsto \int_a^x f(t) dt$ pour f continue. Inégalité des accroissements finis pour une fonction de classe \mathcal{C}^1 .	
f) Formules de Taylor	
Formule de Taylor avec reste intégral. Inégalité de Taylor-Lagrange à l'ordre n pour une fonction de classe \mathcal{C}^n . Formule de Taylor-Young à l'ordre n pour une fonction de classe \mathcal{C}^n .	

Questions de cours ou exercices de début de colle :

- Dérivabilité et dérivée de $L \circ f$, où L est linéaire.
- Dérivabilité et dérivée de $B(f, g)$, où B est bilinéaire
- (rappel de MPSI) Formule de Leibniz
- (rappel de MPSI) Formule de Taylor avec reste intégral.
- Tout ce qui vous paraît intéressant.