Colle n° : Semaine du 6 novembre 2023

Reprise du programme précédent sur a topologie des espaces vectoriels normés, la continuité
On ajoute

Dimension finie, connexité par arcs

i) Connexité par arcs	
Dans un espace vectoriel normé, chemin (ou arc) joignant deux points ; partie connexe par arcs.	Relation d'équivalence associée sur une partie A de E. Les classes sont les composantes connexes par arcs.
Cas des parties convexes, des parties étoilées.	
Les parties connexes par arcs de $\mathbb{R}$ sont les intervalles.	
Image continue d'une partie connexe par arcs.	Cas particulier des applications à valeurs réelles : théorème des valeurs intermédiaires.

j) Espaces vectoriels normés de dimension finie	
Équivalence des normes en dimension finie.	La démonstration n'est pas exigible.
Invariance des différentes notions topologiques par rapport au choix d'une norme en dimension finie. Topologie naturelle d'un espace normé de dimension finie.	La convergence d'une suite (ou l'existence de la limite d'une fonction) à valeurs dans un espace vectoriel normé de dimension finie équivaut à celle de chacune de ses coordonnées dans une base.
Une partie d'un espace normé de dimension finie est compacte si et seulement si elle est fermée et bornée.	
Une suite bornée d'un espace normé de dimension finie converge si et seulement si elle a une unique valeur d'adhérence.	
Un sous-espace de dimension finie d'un espace normé est fermé.	
Si E est de dimension finie, $\mathcal{L}(E,F) = \mathcal{L}_c(E,F)$.	
Continuité des applications polynomiales définies sur un espace normé de dimension finie, des applications multilinéaires définies sur un produit d'espaces vectoriels normés de dimensions finies.	Exemples : déterminant, produit matriciel, composition d'applications linéaires.

Structures algébriques usuelles

a) Compléments sur les groupes	
Intersection de sous-groupes.	
Sous-groupe engendré par une partie. Partie génératrice d'un groupe.	
Sous-groupes du groupe $(\mathbb{Z},+)$.	
Groupe $(\mathbb{Z}/n\mathbb{Z},+)$. Générateurs de $\mathbb{Z}/n\mathbb{Z}$.	
Groupe monogène, groupe cyclique.	Groupe des racines n-ièmes de l'unité.
Tout groupe monogène infini est isomorphe à $(\mathbb{Z},+)$. Tout groupe monogène fini de cardinal n est isomorphe à $(\mathbb{Z}/n\mathbb{Z},+)$.	
Ordre d'un élément d'un groupe.	L'ordre de x est le cardinal du sous-groupe de G engendré par x.
Si x est d'ordre fini d et si e désigne le neutre de G, alors, pour tout $n \in \mathbb{Z}$, $x^n = e \iff d \mid n$.	
L'ordre d'un élément d'un groupe fini divise le cardinal du groupe.	La démonstration n'est exigible que pour G commutatif.

b) Compléments sur les anneaux	
Produit fini d'anneaux.	
Idéal d'un anneau commutatif.	Noyau d'un morphisme d'anneaux commutatifs.
Idéal engendré par un élément.	Notation xA.
Divisibilité dans un anneau commutatif intègre.	Interprétation en termes d'idéaux.

c) Idéaux de $\mathbb{Z}$	
Idéaux de $\mathbb{Z}$.	
Définition du PGCD de $n \geqslant 2$ entiers relatifs en termes d'idéaux, relation de Bézout.	Lien avec le programme de première année.

d) Anneaux $\mathbb{Z}/n\mathbb{Z}$	
Anneau $\mathbb{Z}/n\mathbb{Z}$.	
Inversibles de $\mathbb{Z}/n\mathbb{Z}$. Condition nécessaire et suffisante pour que $\mathbb{Z}/n\mathbb{Z}$ soit un corps.	Notation $\mathbb{F}_p$ lorsque p est premier.
Théorème chinois : isomorphisme naturel de $\mathbb{Z}/mn\mathbb{Z}$ sur $\mathbb{Z}/m\mathbb{Z} \times \mathbb{Z}/n\mathbb{Z}$ si $m \wedge n = 1$; extension à plus de deux facteurs.	Application aux systèmes de congruences et à la résolution de systèmes d'équations dans $\mathbb{Z}/n\mathbb{Z}$.
Indicatrice d'Euler φ. Calcul à l'aide de la décomposition en produits de facteurs premiers.	Relation $\varphi(mn) = \varphi(m)\varphi(n)$ si m et n sont premiers entre eux ; expression de $\varphi(p^k)$ pour p premier.
Théorème d'Euler.	Lien avec le petit théorème de Fermat.

e) Anneaux $\mathbb{K}[X]$	
Dans ce paragraphe, $\mathbb{K}$ est un sous-corps de $\mathbb{C}$.	
Idéaux de $\mathbb{K}[X]$.	
Définition du PGCD de $n \geqslant 2$ polynômes en termes d'idéaux, relation de Bézout.	Par convention, le PGCD est unitaire.
Irréductibles de $\mathbb{K}[X]$. Existence et unicité de la décomposition en facteurs irréductibles unitaires.	
Irréductibles de $\mathbb{C}[X]$ et $\mathbb{R}[X]$.	La démonstration du théorème de d'Alembert-Gauss est hors programme. L'étude des irréductibles de $\mathbb{K}[X]$ pour un corps autre que $\mathbb{R}$ ou $\mathbb{C}$ n'est pas un objectif du programme.

Questions de cours : rien cette semaine mais il serait bien que les étudiants aient un exercice simple sur une partie et un autre sur l'autre.