Colle n° 4 : Semaine du 7 octobre 2024

Intégrale généralisée

Reprise du programme précédent

Réduction des endomorphismes

b) Éléments propres d'un endomorphisme, d'une matrice carrée	
Sous-espace stable par un endomorphisme. Endomorphisme induit.	En dimension finie, traduction matricielle.
Droite stable par un endomorphisme. Valeur propre, vecteur propre (non nul), sous-espace propre.	Équation aux éléments propres $u(x) = \lambda x$.
Spectre d'un endomorphisme en dimension finie.	La notion de valeur spectrale est hors programme.
La somme d'une famille finie de sous-espaces propres d'un endomorphisme est directe.	Toute famille de vecteurs propres associés à des valeurs propres distinctes est libre.
Le spectre d'un endomorphisme d'un espace de dimension finie n est fini, et de cardinal au plus n.	
Si deux endomorphismes u et v commutent, tout sous-espace propre de u est stable par v.	Le noyau et l'image de u sont stables par v.
Valeur propre, vecteur propre, sous-espace propre et spectre d'une matrice carrée.	Équation aux éléments propres $MX = \lambda X$. Deux matrices semblables ont même spectre. Si $\mathbb{K}$ est un sous-corps de $\mathbb{K}'$ et si $M \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$, le spectre de M dans $\mathbb{K}$ est contenu dans le spectre de M dans $\mathbb{K}'$.

c) Polynôme caractéristique	
Polynôme caractéristique d'une matrice carrée, d'un endomorphisme d'un espace vectoriel de dimension finie.	Par convention le polynôme caractéristique est unitaire. Notations χ_A, χ_u. Coefficients du polynôme caractéristique de degrés 0 et $n-1$.
Les valeurs propres d'un endomorphisme d'un espace vectoriel de dimension finie sont les racines de son polynôme caractéristique.	Deux matrices semblables ont même polynôme caractéristique.
Polynôme caractéristique d'une matrice triangulaire.	
Polynôme caractéristique d'un endomorphisme induit. Multiplicité d'une valeur propre.	
La dimension du sous-espace propre associé à λ est majorée par la multiplicité de λ.	

g) Polynômes d'un endomorphisme, d'une matrice carrée	
Pour u dans $\mathcal{L}(E)$, morphisme d'algèbres $P \mapsto P(u)$ de $\mathbb{K}[X]$ dans $\mathcal{L}(E)$. Le noyau de ce morphisme est l'idéal annulateur de u. Son image est la sous-algèbre commutative $\mathbb{K}[u]$ de $\mathcal{L}(E)$.	Traduction matricielle.
Polynôme minimal d'un endomorphisme d'un espace de dimension finie, d'une matrice carrée.	Le polynôme minimal est unitaire. Notations $\pi_u, \mu_u, \pi_M, \mu_M$.
Si d est le degré du polynôme minimal de u, alors la famille $(u^k)_{0 \leqslant k \leqslant d-1}$ est une base de $\mathbb{K}[u]$.	
Si P annule u, toute valeur propre de u est racine de P.	Si $u(x) = \lambda x$, alors $P(u)(x) = P(\lambda)x$.
Les racines de π_u dans $\mathbb{K}$ sont les valeurs propres de u.	

h) Lemme de décomposition des noyaux	
Si $P_1, \dots, P_r$ sont des éléments de $\mathbb{K}[X]$ deux à deux premiers entre eux de produit égal à P, alors : $$\ker(P(u)) = \bigoplus_{i=1}^{r} \ker(P_i(u)).$$	

j) Théorème de Cayley-Hamilton	
Théorème de Cayley-Hamilton.	La démonstration n'est pas exigible.

f) Endomorphismes nilpotents, matrices nilpotentes	
Endomorphisme nilpotent d'un espace vectoriel E de dimension finie, matrice nilpotente.	
Un endomorphisme est nilpotent si et seulement s'il est trigonalisable avec pour seule valeur propre 0.	Caractérisation des endomorphismes nilpotents et des matrices nilpotentes par le polynôme caractéristique.
L'indice de nilpotence est majoré par la dimension de E.	

Questions de cours ou exercices de début de colle :

— La somme d'une famille finie de sous-espaces propres est directe

— Si deux endomorphismes commutent les sous-espaces propres de l'un sont stables par l'autre

— Si d est le degré du polynôme minimal de u, alors la famille $(u^k)_{0 \leqslant k \leqslant d-1}$ est une base de $\mathbb{K}[u]$.

— Tout ce qui vous parait intéressant.