Endomorphismes d'un espace euclidien

MP Lycée Clemenceau

Table des matières

I Adjoint d'un endomorphisme

Théorème I - 1 : de représentation de Riesz

Soit $(E, (\,|\,))$ un espace euclidien.
Pour toute forme linéaire φ sur E il existe un et un seul vecteur $e \in E$ tel que

$$\forall x \in E \quad \varphi(x) = (e \mid x)$$

Théorème I - 2 : Adjoint

Soit $(E, (\,|\,))$ un espace euclidien.
Pour tout endomorphisme u de E il existe un unique endomorphisme de E, qu'on note u^* tel que

$$\forall (x, y) \in E^2 \quad (u(x) \mid y) = (x \mid u^*(y))$$

u^* est appelé adjoint de u.

Propriété I - 1 :

- L'application de $\mathscr{L}(E)$ dans $\mathscr{L}(E)$ qui à u associe $u*$ est linéaire.
- $\forall (u, v) \in \mathscr{L}(E)^2$, $(u \circ v)^* = v^* \circ u^*$.
- $\forall u \in \mathscr{L}(E)$, $(u^*)^* = u$

Proposition I - 1 : Matrice dans une base orthonormale

Soit $u \in \mathscr{L}(E)$.
Si M est la matrice de u dans une base orthonormale alors $M^\top$ est la matrice de u^* dans cette même base.

Proposition I - 2 :

Soit $u \in \mathscr{L}(E)$ et F un sous-espace vectoriel de E.
Si F est stable par u alors $F^\perp$ est stable par u^*.

II Matrices orthogonales

Définition II - 1 : Matrice orthogonale

Une matrice carrée réelle $M \in \mathscr{M}_n(\mathbb{R})$ est orthogonale si elle vérifie $M^\top M = I_n$.

Proposition II - 1 : Caractérisation

Une matrice M de $\mathscr{M}_n(R)$ est orthogonale si et seulement si la famille de ses colonnes est une base orthonormale de $\mathscr{M}_{n,1}(\mathbb{R})$ identifié à $\mathbb{R}^n$ muni de sa structure euclidienne canonique.
Ou encore si et seulement si la famille de ses lignes est une base orthonormale de $\mathscr{M}_{1,n}(\mathbb{R})$ identifié à $\mathbb{R}^n$ muni de sa structure euclidienne canonique.

Proposition II - 2 : Groupe orthogonal

L'ensemble des matrices orthogonales muni de la multiplication est un groupe (sous-groupe de $\mathscr{G}l_n(\mathbb{R})$) appelé groupe orthogonal.
On le note $\mathscr{O}_n(\mathbb{R})$ ou $\mathscr{O}(n)$.

Propriété II - 1 : Déterminant

Le déterminant d'une matrice orthogonale est ± 1.

Définition II - 2 :

Une matrice orthogonale est dite positive ou directe si son déterminant est égal à 1. Dans le cas contraire on dit qu'elle est négative ou indirecte.

Définition II - 3 : Groupe spécial orthogonal

L'ensemble des matrices orthogonales de déterminant égal à 1 est un groupe appelé groupe spécial orthogonal et noté $SO_n(\mathbb{R})$ ou $SO(n)$.

Définition II - 4 : Orientation

Soit E un espace vectoriel de dimension finie. On dit qu'on définit une orientation de E par la donnée d'une base $\mathscr{B}$ qui sera alors dite directe.
Toute autre base est dite directe si son déterminant dans la base $\mathscr{B}$ est strictement positif.

Proposition II - 3 : Produit mixte

Soit $\big(E, (\ |\ )\big)$ un espace euclidien orienté.
Si $\mathscr{B}$ et $\mathscr{B}'$ sont deux bases orthonormées directes alors les applications $\det_{\mathscr{B}}$ et $\det_{\mathscr{B}'}$ sont égales.

III Isométries vectorielles

1) Généralités

Définition III - 1 : Isométrie vectorielle

Soit $\big(E, (\ |\ )\big)$ un espace euclidien. On appelle isométrie vectorielle, ou automorphisme orthogonal de E tout endomorphisme linéaire de E qui conserve la norme. C'est à dire $f \in \mathscr{L}(E)$ tel que $\forall x \in E$, $\|f(x)\| = \|x\|$.

Proposition III - 1 : Caractérisations

Soit $f \in \mathscr{L}(E)$.

a) f est une isométrie vectorielle si et seulement si elle conserve le produit scalaire :

$$\forall (x, y) \in E^2 \qquad \big(f(x) \mid f(y)\big) = (x \mid y)$$

b) f est une isométrie vectorielle si et seulement si l'image par f d'une base orthonormale est une base orthonormale.

c) f est une isométrie vectorielle si et seulement si $f^* = f^{-1}$

Proposition III - 2 : Groupe orthogonal
L'ensemble des isométries vectorielles d'un espace euclidien, muni de la composition est un groupe. C'est un sous-groupe de $\mathscr{G}l(E)$ appelé groupe orthogonal et noté $\mathscr{O}(E)$.

Définition III - 2 :
On dit qu'une isométrie est positive ou directe, respectivement négative ou indirecte, si son déterminant est strictement positif, respectivement négatif.
L'ensemble des isométries positives est un sous-groupe de $\mathscr{O}(E)$ appelé groupe spécial orthogonal de E et noté $\mathscr{S}\mathscr{O}(E)$.

2) Cas de la dimension 2

Proposition III - 3 :
Dans $\mathscr{M}_2(\mathbb{R})$ les matrices orthogonales sont de la forme :
- si $\det(M) = 1$

$$\exists \theta \in \mathbb{R} \quad \text{tel que} \begin{pmatrix} \cos(\theta) & -\sin(\theta) \\ \sin(\theta) & \cos(\theta) \end{pmatrix}$$

- si $\det(M) = -1$

$$\exists \theta \in \mathbb{R} \quad \text{tel que} \begin{pmatrix} \cos(\theta) & \sin(\theta) \\ \sin(\theta) & -\cos(\theta) \end{pmatrix}$$

Définition III - 3 : Rotation vectorielle
On appelle rotation vectorielle du plan euclidien toute isométrie directe du plan.

Proposition III - 4 :
L'application de $\mathbb{R}$ dans $SO_2(\mathbb{R})$ qui à t associe $\begin{pmatrix} \cos(\theta) & -\sin(\theta) \\ \sin(\theta) & \cos(\theta) \end{pmatrix}$ est un morphisme de groupe.
Ce morphisme est surjectif et son noyau est $\{2k\pi, k \in \mathbb{Z}\}$.

Corollaire III - 1 :
Le groupe $SO_2(\mathbb{R})$ est commutatif et isomorphe à $\mathbb{U}$.

Proposition III - 5 : Classification des isométries du plan
Une isométrie du plan est :
- une rotation
- une symétrie orthogonale (réflexion)

3) Réduction des isométries

Proposition III - 6 : Spectre
Le spectre d'une isométrie vectorielle est inclus dans $\{-1, 1\}$.

Proposition III - 7 : Stabilité de l'orthogonal
Si F est un sous espace stable par une isométrie u alors son orthogonal aussi stable par u.

Proposition III - 8 : Sous espaces stables

Tout endomorphisme d'un $\mathbb{R}$-espace vectoriel admet au moins une droite ou un plan stable

Théorème III - 1 : Décomposition d'une isométrie dans une base orthonormale
Si $u \in \mathscr{O}(E)$ il existe une base orthonormale de E dans la quelle la matrice de u est diagonale par blocs de bloc dans $\{(1), (-1)\} \cup \left\{ \begin{pmatrix} \cos(\theta) & -\sin(\theta) \\ \sin(\theta) & \cos(\theta) \end{pmatrix}, \theta \in \mathbb{R} \right\}$

Corollaire III - 2 : Matrices orthogonales
Si $A \in \mathscr{O}(n)$ alors il existe une matrice $P \in \mathscr{O}(n)$ et une matrice B diagonale par blocs de bloc dans $\{(1), (-1)\} \cup \left\{ \begin{pmatrix} \cos(\theta) & -\sin(\theta) \\ \sin(\theta) & \cos(\theta) \end{pmatrix}, \theta \in \mathbb{R} \right\}$ telles que $A = PB\,{}^tP$.

IV Endomorphismes autoadjoints

Définition IV - 1 : Endomorphisme symétrique
Soit $u \in \mathscr{L}(E)$, on dit que u est un endomorphisme autoadjoint si $u = u^*$

Proposition IV - 1 : Espace $\mathscr{S}(E)$
L'ensemble des endomorphismes autoadjoints est un sous espace vectoriel de $\mathscr{L}(E)$ noté $\mathscr{S}(E)$.

Proposition IV - 2 : Lien avec les matrices symétriques
Un endomorphisme de E est autoadjoint si et seulement si sa matrice dans une base orthonormale est symétrique.

Proposition IV - 3 : Noyau et image
L'image et le noyau d'un endomorphisme autoadjoint sont supplémentaires orthogonaux

Proposition IV - 4 : Projecteurs orthogonaux
Un projecteur de E est orthogonal si et seulement si il est autoadjoint.

Proposition IV - 5 : Stabilité
Soit $f \in \mathscr{S}(E)$ et F un sous espace vectoriel de E.
Si F est stable par f alors $F^\perp$ est aussi stable par f.

Proposition IV - 6 : Sous espaces propres

Soit $f \in \mathscr{S}(E)$. Ses sous espaces propres sont en somme directe orthogonale.

Proposition IV - 7 : Polynôme caractéristique

Le polynôme caractéristique d'un endomorphisme autoadjoint est scindé dans $\mathbb{R}$

Théorème IV - 1 : Théorème spectral

Si u est un endomorphisme d'un espace euclidien E, alors u est autoadjoint si et seulement si E est somme orthogonale des sous-espaces propres de u ou, de manière équivalente, s'il existe une base orthonormée diagonalisant u.

Théorème IV - 2 : spectral pour les matrices

Soit $A \in \mathscr{M}_n(\mathbb{R})$. Si A est une matrice symétrique alors il existe une matrice D diagonale et une matrice $P \in \mathscr{O}(n)$ telles que $A = PD\,{}^tP$.

Définition IV - 2 : Endomorphismes autoadjoints positifs

Soit $u \in \mathscr{S}(E)$. On dit que u est positif, respectivement défini positif si pour tout $x \in E$, $\big(u(x) \mid x\big) \geqslant 0$, respectivement $\big(u(x) \mid x\big) > 0$.

Notation :

L'ensemble des endomorphismes autoadjoints positifs, respectivement définis positifs, est noté $\mathscr{S}^+(E)$, respectivement $\mathscr{S}^{++}(E)$.

Proposition IV - 8 :

$u \in \mathscr{S}(E)$ est positif, respectivement défini positif, si et seulement si son spectre est inclus dans $\mathbb{R}_+$, respectivement dans $\mathbb{R}_+^*$.

Définition IV - 3 : Matrices symétriques positives

Une matrice M symétrique réelle est dite positive, respectivement définie positive, si pour tout $X \in \mathscr{M}_{n,1}(\mathbb{R})$, $X^\top AX \geqslant 0$, respectivement $X^\top AX > 0$.

Notation :

L'ensemble des matrices symétriques réelles positives, respectivement définies positives, est noté $\mathscr{S}_n^+(\mathbb{R})$, respectivement $\mathscr{S}_n^{++}(\mathbb{R})$.

Proposition IV - 9 :

Une matrice symétrique réelle est positive, respectivement définie positive, si et seulement si son spectre est inclus dans $\mathbb{R}_+$, respectivement dans $\mathbb{R}_+^*$.