Calcul différentiel et optimisation

MP Lycée Clemenceau

Table des matières

I Etude locale

Les fonctions considérées dans ce chapitre sont définies sur un ouvert U d'un $\mathbb{R}$-espace vectoriel normé de dimension finie E et à valeurs dans un $\mathbb{R}$-espace vectoriel normé de dimension finie F.

Remarque : applications coordonnées

Comme l'espace d'arrivé est un espace de dimension finie, on peut considérer une base $\mathscr{B} = (\varepsilon_i)_{i\in[\![1,p]\!]}$ de cet espace. Dans ce cas, si on note, pour $i \in [\![1,p]\!]$, $\varepsilon_i^* : \sum_{i=1}^{p} x_i\varepsilon_i \mapsto x_i$, et $f_i = \varepsilon_i^* \circ f$ (applications coordonnées), l'étude de f est entièrement définie par l'étude des applications f_i définies de E dans $\mathbb{R}$.

Afin de visualiser les fonctions, nous utiliserons souvent la représentation des surfaces de $\mathbb{R}^3 = \mathbb{R}^2 \times \mathbb{R}$, où $\mathbb{R}^2$ est l'ensemble de départ et $\mathbb{R}$ l'ensemble d'arrivé. Les surfaces seront définies par $\left\{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 / z = f(x,y)\right\}$.

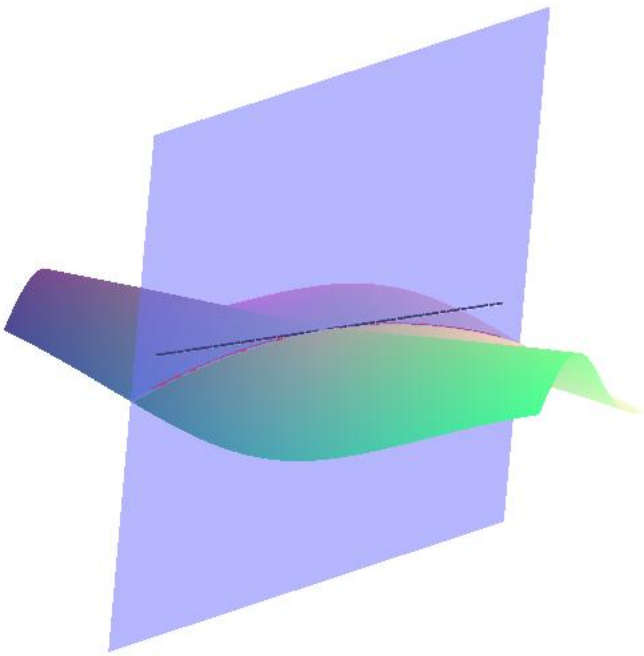
1) Dérivée suivant un vecteur

Définition I - 1 : Dérivée suivant $v \in E$

Soit f définie sur U, et $a \in U$. On dit que f admet une dérivée en a suivant le vecteur v (non nul) si l'application φ définie sur $]-\delta,\delta[$, tel que pour tout $t \in]-\delta,\delta[$, $a+tv \in U$, par $\varphi_v(t) = f(a+tv)$, est dérivable en 0.

On note alors cette dérivée :

$$D_v f(a) = \varphi_v'(0) = \lim_{t\to 0} \frac{1}{t}\left(\varphi_v(t) - \varphi_v(0)\right) = \lim_{t\to 0} \frac{1}{t}\left(f(a+tv) - f(a)\right)$$



Définition I - 2 : Dérivées partielles premières

On considère une base $\mathscr{B} = (e_i)_{i\in[\![1,n]\!]}$ de E.
Soit f définie sur U, et $a \in U$. On appelle dérivées partielles premières en a les dérivées, si elles existent, suivant les vecteurs de la base $\mathscr{B}$, c'est à dire les dérivées suivantes :

$$\partial_j f(a) = \frac{\partial f}{\partial x_j}(a) = \lim_{t\to 0} \frac{1}{t}\left(f(a+te_j) - f(a)\right)$$

2) Différentielle en un point

Définition I - 3 : Différentiabilité

Soit f une application définie sur $U \subset E$ à valeurs dans F. Soit $a \in U$.
On dit que f est différentiable en a s'il existe une application linéaire L_a de E dans F telle qu'au voisinage de a on ait l'existence d'une fonction ε définie sur ce voisinage, continue en a et telle que $\varepsilon(a) = 0$ et,

$$f(x) = f(a) + L_a(x-a) + \varepsilon(x)\,\|x-a\|$$

On écrit alors aussi

$$f(x) = f(a) + L_a(x-a) + o\left(\|x-a\|\right)$$

On parle alors de développement limité à l'ordre 1 en a.
L'application L_a est appelée différentielle de f en a et noté $df(a)$.

Définition I - 4 :

L'application $df(a)$ est encore appelée application linéaire tangente à f en a.
L'application $x \mapsto f(a) + df(a)(x-a)$ est appelée application affine tangente à f en a.

Propriété I - 1 :

Soit f une application d'un ouvert U dans R^p.
Avec l'abus d'écriture $f = (f_1, \dots, f_p)$, f est différentiable en a si et seulement si toutes les fonctions f_i le sont.

Proposition I - 1 :

- Si f est différentiable en a alors elle est continue en a.
- Si f est différentiable en a alors la différentielle en a est unique.
- Si f est différentiable en a alors elle admet une dérivée en a suivant tout vecteur.
  On a de plus
  $$\forall v \in E \quad df(a)(v) = df(a)\cdot v = D_v f(a)$$

Corollaire I - 1 : Liens avec les dérivées partielles premières

Si $\mathscr{B} = (e_j)_{j \in [\![1,n]\!]}$ est une base de E alors

$$\forall j \in [\![1,n]\!] \quad df(a) \cdot e_j = \partial_j f(a)$$

Plus généralement : si $v = \sum_{j=1}^{n} v_j e_j$ alors

$$df(a) \cdot v = \sum_{j=1}^{n} v_j \partial_j f(a)$$

Définition I - 5 : Matrice jacobienne

Soit f une application de $U \subset E$ dans F. Soit $a \in U$. On suppose que f est différentiable en a.
Soient $\mathscr{B} = (e_j)_{j \in [\![1,n]\!]}$ une base de E et $\mathscr{B}' = (e'_i)_{i \in [\![1,p]\!]}$ une base de F.
On appelle matrice jacobienne de f en a relative aux bases $\mathscr{B}$ et $\mathscr{B}'$ la matrice de $df(a)$ relative à ces bases. On la note $Jac(f)(a)$.
HP : Si de plus $E = F$ $(n = p)$ le déterminant de $df(a)$ est appelé le jacobien de f en a, et la trace de $df(a)$ est appelée divergence de f en a.

$$J_f(a) = \det(df(a)) \quad , \quad \operatorname{div} f(a) = \operatorname{tr}(df(a))$$

Propriété I - 2 :

Dans le cas où $E = \mathbb{R}^n$ et $F = \mathbb{R}^p$, si les bases considérées sont les bases canoniques, avec la notation $f = (f_1, .., f_p)$, la matrice jacobienne de f en a est :

$$Jac(f)(a) = \left(\frac{\partial f_i}{\partial x_j}\right)(a)$$

On peut alors noté la divergence : $div f(a) = \overrightarrow{\nabla}.\overrightarrow{f}(a) = \sum_{i=1}^{n} \frac{\partial f_i}{\partial x_i}(a)$

Propriété I - 3 : Fonctions d'une seule variable

Si f est une fonction de I intervalle ouvert de $\mathbb{R}$ à valeurs dans F alors f est différentiable en $a \in I$ si et seulement si f est dérivable en a.
On a de plus

$$df(a) : \begin{array}{ccc} \mathbb{R} & \longrightarrow & F \\ h & \longmapsto & f'(a)h \end{array}$$

On a donc $f'(a) = df(a) \cdot 1$.

3) Opérations

Proposition I - 2 : Espace vectoriel

L'ensemble des applications définies sur U et différentiables en $a \in U$ est un espace $\mathbb{R}$-espace vectoriel et l'application de cet espace dans $\mathscr{L}(E, F)$ qui à f associe $df(a)$ est linéaire.

Proposition I - 3 :

Soit B une application bilinéaire de $F_1 \times F_2$ dans G. On considère $f : U \subset E \to F_1$ et $g : U \subset E \to F_2$ et $a \in U$. Si f et g sont différentiables en a alors l'application $h = B(f, g)$ est différentiable en a et de plus

$$\forall v \in E \quad \mathrm{d}h(a) \cdot v = B(df(a) \cdot v, g(a)) + B(f(a), dg(a) \cdot v)$$

Proposition I - 4 :

Soit M une application n linéaire de $F_1 \times \cdots \times F_n$ dans G, pour $i \in [\![1, n]\!]$, f_i une application de $U \subset E$ dans F_i. On considère l'application $f : U \to G$ définie par, pour $a \in U$, $f(a) = M(f_1(a), \ldots, f_n(a))$.
Si pour tout $i \in [\![1, n]\!]$, f_i est différentiable en a alors f est différentiable a et

$$\forall v \in E \quad \mathrm{d}f(a) \cdot v = \sum_{i=1}^{n} M(f_1(a), \ldots, f_{i-1}(a), \mathrm{d}f_i(a) \cdot v, f_{i+1}(a), \ldots, f_n(a))$$

Corollaire I - 2 :

L'ensemble des applications différentiables en a à valeurs dans $\mathbb{R}$ est une $\mathbb{R}$ algèbre commutative
On a de plus, si f et g deux telles applications,

$$d(fg)(a) = g(a)df(a) + f(a)dg(a)$$

Proposition I - 5 : Composée

Soient $f : U \subset E \to F$ et $g : V \subset F \to G$ deux applications composables. Soit $a \in U$ et $b = f(a)$. On suppose que f est différentiable en a et que g est différentiable en b. Alors $g \circ f$ est différentiable en a et

$$d(g \circ f)(a) = dg(f(a)) \circ df(a)$$

Corollaire I - 3 : Dérivée le long d'un arc

Soit γ est une application définie sur un intervalle I (d'intérieur non vide) de $\mathbb{R}$ à valeurs dans U, dérivable en $t_0 \in I$.
Soit f une application de U dans F. Si f est différentiable en $\gamma(t_0)$, alors $f \circ \gamma$ est dérivable en t_0 et

$$(f \circ \gamma)'(t_0) = df(\gamma(t_0)) \cdot \gamma'(t_0)$$

Propriété I - 4 : Formules pratiques : cas $E = \mathbb{R}^n$ et $F = \mathbb{R}^p$

Soit f de $U \subset E$ dans F et γ de $I \subset \mathbb{R}$ dans U.
Si on note $\gamma = (\gamma_1, \cdots, \gamma_n)$ on a, dans le cas de la différentiabilité,

$$(f \circ \gamma)'(t) = \sum_{j=1}^{n} \gamma_j'(t) \partial_j f(\gamma(t)) = \sum_{j=1}^{n} \gamma_j'(t) \frac{\partial f}{\partial x_j}(\gamma(t))$$

Ce qui matriciellement s'écrit encore $Jac(f)(\gamma(t)) . \gamma'(t)$ (en identifiant E avec $\mathscr{M}_{n,1}(\mathbb{R})$).

Propriété I - 5 : Ecriture matricielle de la composition

Soient $f : U \subset E \to F$ et $g : V \subset F \to G$ deux applications composables. Soit $a \in U$ et $b = f(a)$. On suppose que f est différentiable en a et que g est différentiable en b. Alors $g \circ f$ est différentiable en a et, en munissant E, F et G de bases,

$$Jac(g \circ f)(a) = Jac(g)\,(f(a)) \times Jac(f)(a)$$

Corollaire I - 4 : Formule de la chaîne

Soient $f : U \subset E \to F$ et $g : V \subset F \to G$ deux applications composables.
Soit $a \in U$ et $b = f(a)$, $\dim(E) = n$ et $\dim(F) = p$. Si $(e_i)_{i \in [\![1,p]\!]}$ est une base de F et $(e_i^*)_{i \in [\![1,p]\!]}$ les formes coordonnées associées. On note, pour $i \in [\![1,p]\!]$, $f_i = e_i^* \circ f$.
On suppose que f est différentiable en a et que g est différentiable en b. Alors on a

$$\forall j \in [\![0,n]\!] \quad \frac{\partial (g \circ f)}{\partial u_j}(a) = \sum_{k=1}^{p} \frac{\partial f_k}{\partial u_j}(a) \frac{\partial g}{\partial x_k}\,(f(a))$$

Si on note $h : (u_1, \cdots, u_n) \mapsto g\,(x_1(u_1, \cdots, u_n), \cdots, x_p(u_1, \cdots, u_n))$, sous condition de différentiabilité,

$$\forall j \in [\![0,n]\!] \quad \frac{\partial h}{\partial u_j}(u) = \sum_{k=1}^{p} \frac{\partial x_k}{\partial u_j}(u) \frac{\partial g}{\partial x_k}\,(x_1(u), \cdots, x_n(u))$$

4) Cas des fonctions à valeurs dans $\mathbb{R}$

Définition I - 6 : Gradient

Soit $\big(E, (\ |\ )\big)$ un espace euclidien.
On considère une fonction f de U ouvert de E à valeurs dans $\mathbb{R}$.
Soit $a \in U$, on suppose que f est différentiable en a.
Alors il existe un unique vecteur v de E tel que $\forall h \in E$, $df(a) \cdot h = \big(v \mid h\big)$.
Ce vecteur est appelé gradient de f en a et noté $grad(f)(a) = \nabla f(a)$.

Propriété I - 6 : Interprétation géométrique du gradient

Soit f de $U \subset E$ dans $\mathbb{R}$ et $a \in U$.
Si f est différentiable en a et si $\nabla f(a) \neq 0$, il est colinéaire et de même sens que le vecteur unitaire selon lequel la dérivée de f en a est maximale.

Propriété I - 7 : Expression du gradient

Si $\mathscr{B} = (e_i)_{i \in [\![0,n]\!]}$ est une base orthonormée de E alors, pour f de U dans $\mathbb{R}$ différentiable en a,

$$\nabla f(a) = \sum_{j=1}^{n} \partial_j f(a).e_j$$

Si $E = \mathbb{R}^n$, euclidien usuel, et si E est muni de la base canonique alors

$$\nabla f(a) = \left(\frac{\partial f}{\partial x_1}, \cdots, \frac{\partial f}{\partial x_n} \right)(a)$$

Définition I - 7 : Points critiques

Soit $f : U \subset E \to \mathbb{R}$, différentiable en $a \in U$. On dit que a est un point critique si $\nabla f(a) = 0$.

Proposition I - 6 : Condition nécessaire d'existence d'un extremum local

Soit $f : U \subset E \to \mathbb{R}$, différentiable en $a \in U$.
Si f admet un extremum local en a alors a est un point critique de f.

Complément hors programme

Un point critique est de façon plus général, pour une application de $U \in E$ dans F, est un point où la différentielle n'est pas d'ordre maximal. Si F est de dimension supérieure à celle de E, cela permet d'avoir une injection locale.

II Etude globale

1) Généralisation

Définition II - 1 : Différentiabilité sur un ouvert

Soit f une application définie sur un ouvert U d'un espace vectoriel E de dimension finie à valeurs dans F un espace vectoriel de dimension finie.
On dit que f est différentiable sur U si f est différentiable en tout point de U.
L'application définie sur U à valeurs dans $\mathscr{L}(E, F)$ qui à a associe $df(a)$ est appelée différentielle de f et notée df.

2) Vecteurs tangents

Définition II - 2 : Vecteurs tangents à une partie

Soit A une partie non vide de E et a un point de A.
Un vecteur v de E est dit tangent à A en a s'il existe un arc γ , défini sur un intervalle ouvert de $\mathbb{R}$ contenant 0 et à valeurs dans A, dérivable en 0, tel que

$$\gamma(0) = a \quad \text{et} \quad \gamma'(0) = v$$

L'ensemble des vecteurs tangents à A en a est noté $T_a U$

Propriété II - 1 : Plan affine tangent

L'ensemble des vecteurs tangents en $(a, b, f(a, b))$ à une surface de $\mathbb{R}^3$ d'équation $z = f(x, y)$, avec f différentiable en (a, b), est un plan vectoriel.
Le plan affine passant par $(a, b, f(a, b))$ et admettant le plan vectoriel précédent comme direction est appelé plan affine tangent.
Son équation cartésienne est alors :

$$z - f(a, b) = \frac{\partial f}{\partial x}(a, b)\,(x - a) + \frac{\partial f}{\partial y}(a, b)(y - b)$$

Définition II - 3 : Ligne de niveau

Soit f une application de U dans $\mathbb{R}$.
On appelle ligne de niveau de f tout ensemble $X \in U$ tel il existe $k \in \mathbb{R}$ tel que $X = \{x \in U \ / \ f(x) = k\}$.

Proposition II - 1 : Ligne de niveau et gradient

Si f est une fonction à valeurs réelles définie et différentiable sur un ouvert de l'espace euclidien E, si X est une ligne de niveau de f , alors les vecteurs tangents à X au point x de X sont orthogonaux au gradient de f en x.

3) Applications de classe $\mathscr{C}^1$

Définition II - 4 :

Une application f est dite de classe $\mathscr{C}^1$ sur un ouvert Ω si elle est différentiable sur Ω et si df est continue sur Ω.

Théorème II - 1 :

L'application f est de classe $\mathscr{C}^1$ sur Ω si et seulement si les dérivées partielles relativement à une base de E existent en tout point de Ω et sont continues sur Ω .

Exemple II - 1 :

Exercice 33 banque CCINP

On pose : $\forall\,(x,y)\in\mathbb{R}^2\setminus\{(0,0)\},\ f\,(x,y)=\dfrac{xy}{\sqrt{x^2+y^2}}$ et $f\,(0,0)=0$.

1. Démontrer que f est continue sur $\mathbb{R}^2$.
2. Démontrer que f admet des dérivées partielles en tout point de $\mathbb{R}^2$.
3. f est-elle de classe C^1 sur $\mathbb{R}^2$? Justifier.

Exemple II - 2 :

Exercice 52 banque CCINP

Soit $\alpha\in\mathbb{R}$.

On considère l'application définie sur $\mathbb{R}^2$ par $f(x,y)=\begin{cases}\dfrac{y^4}{x^2+y^2-xy} & \text{si } (x,y)\neq(0,0)\\ \alpha & \text{si } (x,y)=(0,0).\end{cases}$

1. Prouver que : $\forall(x,y)\in\mathbb{R}^2,\ x^2+y^2-xy\geqslant\dfrac{1}{2}(x^2+y^2)$.
2. (a) Justifier que le domaine de définition de f est bien $\mathbb{R}^2$.
   (b) Déterminer α pour que f soit continue sur $\mathbb{R}^2$.
3. Dans cette question, on suppose que $\alpha=0$.
   (a) Justifier l'existence de $\dfrac{\partial f}{\partial x}$ et $\dfrac{\partial f}{\partial y}$ sur $\mathbb{R}^2\setminus\big\{(0,0)\big\}$ et les calculer.
   (b) Justifier l'existence de $\dfrac{\partial f}{\partial x}(0,0)$ et $\dfrac{\partial f}{\partial y}(0,0)$ et donner leur valeur.
   (c) f est-elle de classe $\mathcal{C}^1$ sur $\mathbb{R}^2$?

Exemple II - 3 :
Exercice 57 banque CCINP

1. Soit f une fonction de $\mathbb{R}^2$ dans $\mathbb{R}$.
   (a) Donner, en utilisant des quantificateurs, la définition de la continuité de f en $(0,0)$.
   (b) Donner la définition de «f différentiable en $(0,0)$».
2. On considère l'application définie sur $\mathbb{R}^2$ par $f(x,y) = \begin{cases} xy\dfrac{x^2-y^2}{x^2+y^2} & \text{si } (x,y) \neq (0,0) \\ 0 & \text{si } (x,y) = (0,0) \end{cases}$
   (a) Montrer que f est continue sur $\mathbb{R}^2$.
   (b) Montrer que f est de classe $\mathcal{C}^1$ sur $\mathbb{R}^2$.

Propriété II - 2 :
L'ensemble des fonctions de classes $\mathscr{C}^1$ sur U est un $\mathbb{R}$ espace vectoriel.
Si l'espace d'arrivé est $\mathbb{R}$ ou une $\mathbb{R}$ algèbre alors c'est une $\mathbb{R}$ algèbre.

Propriété II - 3 :
Soient f une application de U dans F et g une application de $V \subset F$ dans G, composables.
Si f est de classe $\mathscr{C}^1$ sur U et g de classe $\mathscr{C}^1$ sur V alors $g \circ f$ est de classe $\mathscr{C}^1$ sur U.

Proposition II - 2 :
Si f est une application de classe $\mathscr{C}^1$ de Ω dans F, si γ est une application de classe $\mathscr{C}^1$ de $[0,1]$ dans Ω, si $\gamma(0) = a$, $\gamma(1) = b$, alors :

$$f(b) - f(a) = \int_0^1 df(\gamma(t)) \cdot \gamma'(t)\, dt$$

Théorème II - 2 : Caractérisation des applications constantes
Si U est connexe par arcs, une application de classe $\mathscr{C}^1$ sur U est constante sur U si et seulement si sa différentielle est nulle sur U.

Théorème II - 3 :
Si g est une fonction numérique définie et de classe $\mathscr{C}^1$ sur l'ouvert Ω de E, $X = g^{-1}(\{0\})$, si $x \in X$ et $\mathrm{d}g(x) \neq 0$, alors T_xX est égal au noyau de $\mathrm{d}g(x)$.

4) Optimisation : étude au premier ordre

Théorème II - 4 :
Si f est une fonction numérique définie sur l'ouvert Ω, si X est une partie de Ω, si la restriction de f à X admet un extremum local en x et si f est différentiable en x, alors $\mathrm{d}f(x)$ s'annule en tout vecteur tangent à X en x.

Théorème II - 5 : d'optimisation sous une contrainte

si f et g sont des fonctions numériques définies et classe $\mathcal{C}^1$ sur l'ouvert Ω de E, si X est l'ensemble des zéros de g, si $x \in X$et $\mathrm{d}g(x) \neq 0$ et si la restriction de f à X admet un extremum local en x, alors $\mathrm{d}f(x)$ est colinéaire à $\mathrm{d}g(x)$

5) Applications de classe $\mathscr{C}^k$

Définition II - 5 : Dérivées partielles d'ordre supérieur à 2

Soit E un $\mathbb{R}$ espace vectoriel de dimension finie et $\mathscr{B} = (e_j)_{j \in [\![0,n]\!]}$ une base de E.
Soit f une application de $U \subset E$ dans F de classe $\mathscr{C}^1$.
On dit que f admet des dérivées partielles secondes si ses dérivées partielles premières admettent des dérivées partielles.
On généralise pour $k \in \mathbb{N}^*$: f admet des dérivées partielles d'ordre k si elle admet des dérivées partielles d'ordre $k-1$ et celles-ci admettent des dérivées partielles premières.

Notation :

La dérivée partielle suivant le vecteur e_j de $\partial_i f$ est alors notée $\partial_j \partial_i f$, ou encore $\dfrac{\partial^2 f}{\partial x_j \partial x_i}$.
En généralisant : $\frac{\partial^k f}{\partial x_{j_1} .. \partial x_{j_k}}$, $\partial_{j_1} ... \partial_{j_k} f$ est la dérivée partielle suivant e_{j_1} de $\frac{\partial^{k-1} f}{\partial x_{j_2} .. \partial x_{j_k}}$, $\partial_{j_2} ... \partial_{j_k} f$.

Définition II - 6 : Fonction de classe $\mathscr{C}^k$

Une fonction est dite de classe $\mathscr{C}^k$ sur U si ses dérivées partielles d'ordre k existent et sont continues sur U.

Théorème II - 6 : de Schwarz

Si f est une fonction de classe $\mathscr{C}^2$ alors, pour tout i et j tels que $i \neq j$, $\partial_i \partial_j f = \partial_j \partial_i f$.

Propriété II - 4 :

L'ensemble des applications de classe $\mathscr{C}^k$ sur U est un $\mathbb{R}$ espace vectoriel.
L'ensemble des applications de classe $\mathscr{C}^k$ sur U à valeurs dans $\mathbb{R}$ est une $\mathbb{R}$ algèbre.

Propriété II - 5 :

La composée d'applications de classe $\mathscr{C}^k$ est une application de classe $\mathscr{C}^k$.

6) Optimisation : étude au second ordre

Définition II - 7 : Matrice hessienne

Soit f une fonction de classe $\mathscr{C}^2$ sur un ouvert de $\mathbb{R}^n$ à valeurs dans $\mathbb{R}$.
Soit a un point de cet ouvert. On appelle matrice hessienne de f en a, la matrice $H_f(a) \in \mathscr{M}_n(\mathbb{R})$ dont les composantes sont, pour $(i,j) \in [\![1,n]\!]^2$, $\partial_i \partial_j f(a)$.

Théorème II - 7 : Formule de Taylor-Young à l'ordre 2

Soit f une fonction $\mathscr{C}^2$ sur un ouvert de $\mathbb{R}^n$ à valeurs dans $\mathbb{R}$.
On a alors, pour tout x dans l'ouvert :

$$f(x+h) \underset{h\to 0}{=} f(x) + \langle \nabla f(x), h\rangle + \frac{1}{2}\langle H_f(x)\cdot h, h\rangle + o(\|h\|^2)$$

$$f(x+h) \underset{h\to 0}{=} f(x) + \nabla f(x)^\top h + \frac{1}{2} h^\top H_f(x) h + o(\|h\|^2)$$

Théorème II - 8 :

Si f est une fonction de classe $\mathscr{C}^2$ sur un ouvert de $\mathbb{R}^n$ et si f admet un minimum local en x, alors x est point critique de f et $H_f(x) \in \mathscr{S}_n^+(\mathbb{R})$.

Théorème II - 9 :

Si f est une fonction de classe $\mathscr{C}^2$ sur un ouvert de $\mathbb{R}^n$, si x est point critique de f et si $H_f(x) \in \mathscr{S}_n^{++}(\mathbb{R})$, alors f atteint un minimum local strict en x.

III Intégrales à paramètres

1) Continuité et limite

Théorème III - 1 : Continuité sous le signe intégrale

Soit A une partie d'un espace normé de dimension finie, I un intervalle de $\mathbb{R}$, f une fonction définie sur $A\times I$ à valeurs dans $\mathbb{K}$. On suppose que f est continue par rapport à la première variable, continue par morceaux par rapport à la seconde variable. On suppose de plus qu'il existe une fonction φ positive intégrable sur I telle que, pour tout x de A, $|f(x,.)| \leqslant \varphi$. Alors

$$g : x \mapsto \int_I f(x,t)\,dt$$

est définie et continue sur A.

Théorème III - 2 : Limite continue sous l'intégrale

Soit J un intervalle de $\mathbb{R}$, I un intervalle de $\mathbb{R}$, f une fonction définie sur $J\times I$ à valeurs dans $\mathbb{K}$.
Soit $a \in \overline{J}$. On suppose que pour tout $t \in I$ $f(\cdot,t)$ admet une limite finie $\ell(t)$ en a, et que pour tout $x \in J$ $f(x,\cdot)$ est continue par morceaux sur I ainsi que la fonction ℓ.
On suppose de plus qu'il existe une fonction φ positive intégrable sur I telle que, pour tout x de J, $|f(x,.)| \leqslant \varphi$.
Alors la fonction ℓ est intégrable sur I,
la fonction $g : x \mapsto \displaystyle\int_I f(x,t)\,dt$ est correctement définie et admet une limite en a qui est $\displaystyle\int_I \ell(t)dt$.

Exemple III - 1 :
Exercice 50 banque CCINP
On considère la fonction $F : x \mapsto \displaystyle\int_0^{+\infty} \frac{\mathrm{e}^{-2\,t}}{x+t}\mathrm{d}t$.

1. Prouver que F est définie et continue sur $]0;+\infty[$.
2. Prouver que $x \longmapsto xF(x)$ admet une limite en $+\infty$ et déterminer la valeur de cette limite.
3. Déterminer un équivalent, au voisinage de $+\infty$, de $F(x)$.

2) Dérivabilité

Théorème III - 3 : Dérivabilité sous le signe intégrale

Soit I et J deux intervalles de $\mathbb{R}$, f une fonction définie sur $J \times I$ à valeurs dans $\mathbb{K}$. On suppose que f est continue par morceaux par rapport à la seconde variable, que, pour tout x de J, $t \mapsto f(x,t)$ est intégrable sur I, que $\dfrac{\partial f}{\partial x}$ est définie sur $J \times I$, continue par rapport à la première variable, continue par morceaux par rapport à la seconde variable. On suppose de plus qu'il existe une fonction φ positive intégrable sur I telle que, pour tout x de J , $\left|\dfrac{\partial f}{\partial x}(x,.)\right| \leqslant \varphi$.

Alors $g : x \mapsto \displaystyle\int_I f(x,t)dt$ est de classe $\mathscr{C}^1$ sur J et vérifie :

$$\forall x \in J, \quad g'(x) = \int_I \frac{\partial f}{\partial x}(x,t)dt$$

Théorème III - 4 : Classe $\mathscr{C}^k$

Soit $k \in \mathbb{N}^*$. Soit I et J deux intervalles de $\mathbb{R}$, f une fonction définie sur $J \times I$ à valeurs dans $\mathbb{K}$.
On suppose que f est continue par morceaux par rapport à la seconde variable, que,

— pour tout $j \in [\![0,k]\!]$, $\dfrac{\partial^j f}{\partial x^j}$ est définie sur $J \times I$, continue par rapport à la première variable, continue par morceaux par rapport à la seconde variable

— pour tout $j \in [\![0,k-1]\!]$, pour tout x de J, $\dfrac{\partial^j f}{\partial x^j}(x,\cdot)$ est intégrable sur I

— il existe une fonction φ continue par morceaux sur I, positive intégrable sur I telle que, pour tout x de J , $\left|\dfrac{\partial^k f}{\partial x^k}(x,.)\right| \leqslant \varphi$.

Alors $g : x \mapsto \displaystyle\int_I f(x,t)dt$ est de classe $\mathscr{C}^k$ sur J et vérifie :

$$\forall j \in [\![0,k]\!] \, \forall x \in J, \quad g^{(j)}(x) = \int_I \frac{\partial^j f}{\partial x^j}(x,t)\,\mathrm{d}t$$

Remarque : importante
Dans les deux théorèmes précédents la domination peut se faire sur tout compact de J.

Exemple III - 2 :
Exercice 29 banque CCINP
On pose : $\forall\, x \in]0,+\infty[$, $\forall\, t \in]0,+\infty[$, $f(x,t) = \mathrm{e}^{-t}t^{x-1}$.

1. Démontrer que : $\forall\, x \in]0,+\infty[$, la fonction $t \mapsto f(x,t)$ est intégrable sur $]0,+\infty[$.

   On pose alors : $\forall\, x \in]0,+\infty[$, $\Gamma(x) = \displaystyle\int_0^{+\infty} \mathrm{e}^{-t}t^{x-1}\mathrm{d}t$.
2. Pour tout $x \in]0,+\infty[$, exprimer $\Gamma(x+1)$ en fonction de $\Gamma(x)$.
3. Démontrer que Γ est de classe C^1 sur $]0;+\infty[$ et exprimer $\Gamma'(x)$ sous forme d'intégrale.

Exemple III - 3 :
Exercice 30 banque CCINP

1. Énoncer le théorème de dérivation sous le signe intégrale.
2. Démontrer que la fonction $f : x \longmapsto \displaystyle\int_0^{+\infty} e^{-t^2}\cos(xt)\,\mathrm{d}t$ est de classe C^1 sur $\mathbb{R}$.
3. (a) Trouver une équation différentielle linéaire (E) d'ordre 1 dont f est solution.
   (b) Résoudre (E) .