Variables aléatoires

MP Lycée Clemenceau

Table des matières

I Variables aléatoires discrètes

Définition I - 1 : Variables aléatoires discrètes

Soit $(\Omega, \mathscr{A})$ un espace probabilisable. Soit E un ensemble non vide. Une variable aléatoire discrète sur Ω est une application X de Ω dans E telle que $X(\Omega)$ soit fini ou dénombrable et que, pour tout x de $X(\{\Omega\})$, $X^{-1}(\{x\}) \in \mathscr{A}$.
Lorsque $E = \mathbb{R}$ on dit que c'est une variable aléatoire réelle.

Dans la suite on note X une variable aléatoire et, comme il est fini ou dénombrable, on note l'image $X(\Omega) = \{x_i / i \in I\}$ avec $I = [\![1, n]\!]$ si celui-ci est fini, ou $I = \mathbb{N}$ ou $\mathbb{N}^*$.

Notation :

- On note, pour $x \in E$, $(X = x) = \{X = x\}$ l'ensemble $X^{-1}(\{x\})$
- Pour toute partie A de E ou $X(\Omega)$, on note $(X \in A) = \{X \in A\}$ l'ensemble $X^{-1}(A)$
- Lorsque la loi est réelle :
  - $(X \leqslant x)$ est l'ensemble $X^{-1}(]-\infty, x])$.
  - $(X < x)$ est l'ensemble $X^{-1}(]-\infty, x[)$.
  - $(X \geqslant x)$ est l'ensemble $X^{-1}([x, +\infty[)$.
  - $(X > x)$ est l'ensemble $X^{-1}(]x, +\infty[)$.

Définition I - 2 : Loi

Dans un espace probabilisé $(\Omega, \mathscr{A})$. Soit $X : \Omega \to E$ une variable aléatoire discrète.
L'ensemble $\mathcal{T} = \mathscr{P}(X(\Omega))$ est une tribu sur l'ensemble au plus dénombrable $X(\Omega)$.
On appelle loi de probabilité (ou loi de distribution) de X l'application

$$\mathbf{P}_X : \begin{array}{ccc} \mathcal{T} & \longrightarrow & \mathbb{R}^+ \\ A & \longmapsto & \mathbf{P}((X \in A)) \end{array}$$

Propriété I - 1 : Probabilité

L'application $\mathbf{P}_X$ est une probabilité sur $(X(\Omega), \mathcal{T})$.
C'est la probabilité définie par la distribution de probabilités discrète $(\mathbf{P}(X = x))_{x \in X(\Omega)}$.
On a en particulier $\displaystyle\sum_{x \in X(\Omega)} \mathbf{P}((X = x)) = 1$.

Notation :

- Si $\mathcal{L}$ est une application de $\mathscr{P}(E)$ dans $\mathbb{R}^+$, on dit que X suit la loi $\mathcal{L}$, et on note $X \sim \mathcal{L}$, si $\mathbf{P}_X = \mathcal{L}$.
- Si Y est une seconde variable aléatoire définie sur un espace probabilisé éventuellement différent et à valeurs dans E, on dit que X et Y ont même loi, et on note $X \sim Y$, si $\mathbf{P}_X = \mathbf{P}_Y$.

Propriété I - 2 :

Soit f une application de E dans F. Si X est une variable aléatoire à valeurs dans E, alors $f(X) = f \circ X$ est une variable aléatoire discrète à valeurs dans F.
De plus si $X \sim Y$ alors $f(X) \sim f(Y)$.

Définition I - 3 : Loi conditionnelle

Soit A un événement non négligeable. On appelle loi conditionnelle de X sachant A la loi de X dans l'espace probabilisé $(\Omega, \mathscr{A}, P_A)$. On note alors naturellement $\mathbf{P}(X = x|A)$ la quantité $\mathbf{P}_A(X = x)$.
On a donc

$$\mathbf{P}(X = x|A) = \frac{\mathbf{P}(X = x, A)}{\mathbf{P}(A)}$$

II Lois usuelles

Rappels de MPSI :

Définition II - 1 : Loi uniforme

Soit $[\![a, b]\!]$ un intervalle entier, avec a et b dans $\mathbb{Z}$ vérifiant $a < b$. On dit que la variable aléatoire X suit une loi uniforme sur $[\![a, b]\!]$, et on note $X \sim \mathcal{U}([\![a, b]\!])$, si $X(\Omega)) = [\![a, b]\!]$ et si, pour $k \in [\![a, b]\!]$, on a

$$\mathbf{P}_X(k) = \frac{1}{b - a + 1}$$

Autrement dit tous les entiers entre a et b ont même probabilité.

Définition II - 2 : Loi de Bernoulli

Soit $p \in]0, 1[$. On dit que la variable aléatoire X suit une loi de Bernoulli de paramètre p, et on note $X \sim \mathscr{B}(p)$, si $X(\Omega) = \{0, 1\}$ et $\mathbf{P}_X(1) = p$. On a alors, par propriété $\mathbf{P}_X(0) = 1 - p$.

Définition II - 3 : Loi binomiale

Soit $n \in \mathbb{N}^*$ et $p \in]0, 1[$. On dit qu'une variable aléatoire X suit une loi binomiale de paramètres n et p, et on note $X \sim \mathscr{B}(n, p)$, si $X(\Omega) = [\![0, n]\!]$ et

$$\forall k \in [\![0, n]\!] \qquad \mathbf{P}_X(k) = \binom{n}{k} p^k (1 - p)^{n-k}$$

Définition II - 4 : Loi géométrique

Soit $p \in]0, 1[$. On dit qu'une variable aléatoire X suit une loi géométrique de paramètre p, et on note $X \sim \mathscr{G}(p)$, si $X(\Omega) = \mathbb{N}^*$ et

$$\forall k \in \mathbb{N}^*, \qquad \mathbf{P}_X(k) = p(1 - p)^{k-1}$$

Définition II - 5 : Loi de Poisson

Soit $\lambda \in \mathbb{R}_+^*$. On dit qu'une variable aléatoire X suit une loi de Poisson de paramètre λ, et on note $X \sim \mathscr{P}(\lambda)$, si $X(\Omega) = \mathbb{N}$ et pour tout $k \in \mathbb{N}$, $\mathbf{P}_X(k) = e^{-\lambda}\dfrac{\lambda^k}{k!}$.

Théorème II - 1 : Approximation d'une loi binomiale par une loi de Poisson

Si, pour tout n, $X_n \sim \mathscr{B}(n, p_n)$ et si (np_n) converge vers λ, alors :

$$\forall k \in \mathbb{N}, \quad \mathbf{P}(X_n = k) \underset{n \to +\infty}{\longrightarrow} e^{-\lambda}\frac{\lambda^k}{k!}$$

III Valeurs typiques

1) Espérance

Définition III - 1 : Espérance d'une variable réelle positive

Si X est une variable aléatoire à valeurs dans $\mathbb{R}^+ \cup \{+\infty\}$, l'espérance de X est la somme, dans $[0, +\infty]$, de la famille $(\mathbf{P}(X = x)x)_{x \in X(\Omega)}$.

$$\mathbf{E}(X) = \sum_{x \in X(\Omega)} \mathbf{P}(X = x)\, x$$

Proposition III - 1 :

Soit X une variable aléatoire à valeurs dans $\mathbb{N} \cup \{+\infty\}$, on a l'égalité :

$$\mathbf{E}(X) = \sum_{n=1}^{+\infty} \mathbf{P}(X \geqslant n)$$

Définition III - 2 : Espérance d'une variable complexe

Si X est une variable aléatoire complexe, la variable aléatoire X est dite d'espérance finie si la famille $(x\mathbf{P}(X = x))_{x \in X(\Omega)}$ est sommable ; dans ce cas, la somme de cette famille est l'espérance de$X$

Définition III - 3 : Variable centrée

Une variable aléatoire est dite centrée si elle admet une espérance et si celle-ci est nulle .

Propriété III - 1 : Variable aléatoire bornée

Toute variable aléatoire bornée admet une espérance.

Propriété III - 2 :

L'ensemble des variables aléatoires réelles sur Ω admettant une espérance forme un espace vectoriel noté L^1 et l'espérance est une forme linéaire sur cet espace vectoriel.

Propriété III - 3 : Croissance

L'espérance est une forme linéaire positive et croissante, c'est-à-dire que si X est à valeurs positives alors l'espérance est positive, et si X et Y sont deux variables aléatoires admettant des espérances (finies) et si $X \leqslant Y$ alors $\mathbf{E}(X) \leqslant \mathbf{E}(Y)$.

Proposition III - 2 :

On considère une variable aléatoire discrète réelle X. Si X est positive presque sûrement alors $\mathbf{E}(X) \geqslant 0$.
De plus $\mathbf{E}(X) = 0$ si et seulement si $X = 0$ presque sûrement.
Si X et Y sont deux variables aléatoires discrètes telles que $X \leqslant Y$ presque sûrement alors $\mathbf{E}(X) \leqslant \mathbf{E}(Y)$.
De plus $\mathbf{E}(X) = \mathbf{E}(Y)$ si et seulement si $X = Y$ presque sûrement.

Corollaire III - 1 : Inégalité triangulaire

Si X est une variable aléatoire admettant une espérance alors $|\mathbf{E}(X)| \leqslant \mathbf{E}(|X|)$

Proposition III - 3 :

Si $|X| \leqslant Y$ et si Y est d'espérance finie, alors X est d'espérance finie.

Proposition III - 4 : Espérances des lois usuelles

a) loi uniforme : $\mathbf{E}(X) = \dfrac{a+b}{2}$, ou encore $\mathbf{E}(X) = \frac{1}{n}\sum\limits_{i=1}^{n} x_i$

b) loi de Bernoulli : si $X \sim \mathscr{B}(p)$ alors $\mathbf{E}(X) = p$.

c) loi binomiale : si $X \sim \mathscr{B}(n,p)$ alors $\mathbf{E}(X) = np$.

d) loi géométrique : si $X \sim \mathscr{G}(p)$ alors $\mathbf{E}(X) = \dfrac{1}{p}$

e) loi de Poisson : si $X \sim \mathcal{P}(\lambda)$ alors $\mathbf{E}(X) = \lambda$.

Théorème III - 1 : Inégalité de Markov

Si X est une variable aléatoire positive et si $t \in \mathbb{R}_+^*$ alors $\mathbf{P}(X \geqslant t) \leqslant \dfrac{\mathbf{E}(X)}{t}$.

Théorème III - 2 : Formule du transfert

Soit f une fonction de $X(\Omega)$ dans $\mathbb{C}$, alors $f(X)$ est d'espérance finie si et seulement si la famille $(f(x)\mathbf{P}(X=x))_{x\in X(\Omega)}$ est sommable et, dans ce cas, on a

$$\mathbf{E}(f(X)) = \sum_{x\in X(\Omega)} \mathbf{P}(X=x)\, f(x)$$

Corollaire III - 2 : Inégalité de Markov

Soit f une fonction croissante et positive, définie sur un intervalle I.

Si X est une variable aléatoire à valeurs dans I (ou presque surement), on a $\mathbf{P}(X \geqslant a) \leqslant \dfrac{\mathbf{E}(f(X))}{f(a)}$

2) Variance

Définition III - 4 : Moments (HP)

Soit $n \in \mathbb{N}$, on dit qu'une variable aléatoire X admet un moment d'ordre n si X^n admet une espérance, c'est-à-dire si la famille $(x^n\mathbf{P}(X=x))_{x\in X(\Omega)}$ est sommable.
On appelle alors moment d'ordre n le réel :

$$m_n(X) = \mathbf{E}(X^n) = \sum_{x\in X(\Omega)} x^n \mathbf{P}(X=x)$$

Théorème III - 3 :

Si une variable aléatoire X admet un moment d'ordre 2 alors elle admet une espérance finie.
Autre écriture : si $\mathbf{E}\left(X^2\right) < +\infty$ alors X est d'espérance finie.
Ou encore : si $X \in L^2$ alors $X \in L^1$.

Théorème III - 4 : Inégalité de Cauchy-Schwarz

Si X et Y sont deux variables aléatoires admettant chacune un moment d'ordre 2, alors XY est une variable aléatoire admettant une espérance finie et de plus

$$\mathbf{E}\left(XY\right)^2 \leqslant \mathbf{E}\left(X^2\right)\mathbf{E}\left(Y^2\right)$$

On a en particulier que l'ensemble des variables aléatoires définies sur Ω admettant un moment d'ordre 2 est un espace vectoriel.

Définition III - 5 : Variance et écart type

Soit X une variable aléatoire admettant un moment d'ordre 2, la variable aléatoire centrée $X - E(X)$ admet aussi un moment d'ordre 2 appelé variance de X

$$\mathbf{V}\left(X\right) = \mathbf{E}\left(\left(X - \mathbf{E}\left(X\right)\right)^2\right)$$

Cette valeur étant positive on peut alors définir le réel suivant, appelé écart type de X :

$$\sigma\left(X\right) = \sqrt{\mathbf{V}\left(X\right)}$$

Définition III - 6 : Variable réduite

Une variable aléatoire admettant une espérance est dite réduite si sa variance est égale à 1.

Proposition III - 5 :

Une variable aléatoire admettant une variance nulle est presque sûrement constante.

Théorème III - 5 : König-Huygens

Si X admet une variance alors elle admet un moment d'ordre 2 et on a

$$\mathbf{V}\left(X\right) = \mathbf{E}\left(X^2\right) - \mathbf{E}\left(X\right)^2$$

Proposition III - 6 :

Soit X une variable aléatoire admettant une variance. Pour $(a, b) \in \mathbb{R}^2$, on a que $aX + b$ admet une variance et

$$\mathbf{V}\left(aX + b\right) = a^2\mathbf{V}(X), \qquad \sigma\left(aX + b\right) = |a|\,\sigma\left(X\right)$$

Théorème III - 6 : Inégalité de Bienaymé-Tchebychev

Soit X une variable aléatoire discrète admettant une variance, on a

$$\forall \varepsilon > 0, \quad \mathbf{P}\left(|X - \mathbf{E}(X)| \geqslant \varepsilon\right) \leqslant \frac{\mathbf{V}(X)}{\varepsilon^2}$$

Proposition III - 7 : Lois usuelles

- Loi uniforme $\mathscr{U}\,[\![a,b]\!]$: $\mathbf{V}(X) = \dfrac{(b-a)(b-a+2)}{12}$
- loi de Bernoulli : si $X \sim \mathscr{B}(p)$ alors $\mathbf{V}(X) = p(1-p)$.
- loi binomiale : si $X \sim \mathscr{B}(n,p)$ alors $\mathbf{V}(X) = np(1-p)$.
- loi géométrique : si $X \sim \mathscr{G}(p)$ alors $\mathbf{V}(X) = \dfrac{1-p}{p^2}$
- loi de Poisson : si $X \sim \mathcal{P}(\lambda)$ alors $\mathbf{V}(X) = \lambda$.

IV Familles de variables aléatoires

Dans cette section X et Y sont des variables aléatoires discrètes définies sur $(\Omega, \mathscr{A}, P)$ et à valeurs dans E. Puisque le couple (X,Y) est à valeurs dans $X(\Omega) \times Y(\Omega)$ et que le produit de deux ensembles au plus dénombrables est au plus dénombrable, (X,Y) est une variable aléatoire discrète.

Définition IV - 1 : Couple de variables aléatoires discrètes

Le couple (X,Y) est une variable aléatoire discrète à valeurs dans E^2. On appelle loi conjointe la loi de (X,Y).
Les variables X et Y sont appelées marginales du couple (X,Y) et leurs lois sont appelées lois marginales (en X ou en Y) du couple (X,Y).

Définition IV - 2 : Loi conditionnelle

Soit $x \in X(\Omega)$ tel que $(X = x)$ ne soit pas négligeable. On appelle loi conditionnelle de Y sachant $(X = x)$ la loi de Y dans l'espace probabilisé $\left(\Omega, \mathscr{A}, P_{(X=x)}\right)$. On note alors naturellement $\mathbf{P}(Y = y | X = x)$ la quantité $\mathbf{P}_{(X=x)}(Y = y)$.
On a donc

$$\mathbf{P}(Y = y | X = x) = \frac{\mathbf{P}(Y = y, X = x)}{\mathbf{P}(X = x)}$$

Définition IV - 3 : Couple de variables aléatoires discrètes indépendantes

On dit que X et Y sont indépendantes si, pour tout $x \in X(\Omega)$ et tout $y \in Y(\Omega)$, les événements $(X = x)$ et $(Y = y)$ sont indépendants. C'est à dire si

$$\mathbf{P}\left((Y = y) \cap (X = x)\right) = \mathbf{P}(X = x)\mathbf{P}(Y = y)$$

En particulier, pour tout événements non négligeable $(X = x)$, la loin conditionnelle de Y sachant $(X = x)$ est égale à la loi de Y.
On note alors $X \perp\!\!\!\perp Y$

Propriété IV - 1 :

Si X et Y sont deux variables aléatoires discrètes indépendantes et si A et B sont des parties de E, on a

$$\mathbf{P}\left((X,Y) \in A \times B\right) = \mathbf{P}(X \in A)\,\mathbf{P}(Y \in B)$$

Propriété IV - 2 :

Les variables aléatoires X et Y sont indépendantes si et seulement si la distribution de probabilités de (X, Y) est le produit des distributions de probabilités de X et Y.

Théorème IV - 1 : Espérance

Si X et Y sont deux variables aléatoires discrètes indépendantes admettant chacune une espérance (finie) alors XY admet une espérance et on a

$$\mathbf{E}(XY) = \mathbf{E}(X)\,\mathbf{E}(Y)$$

Définition IV - 4 : Covariance

Si X, Y et XY admettent des espérances, on appelle covariance de X et Y la quantité

$$\mathbf{Cov}(X, Y) = \mathbf{E}\left((X - \mathbf{E}(X))\,(Y - \mathbf{E}(Y))\right)$$

Par linéarité de l'espérance on a aussi :

$$\mathbf{Cov}(X, Y) = \mathbf{E}(XY) - \mathbf{E}(X)\,\mathbf{E}(Y)$$

En particulier si X et Y sont indépendantes alors la covariance est nulle.

Propriété IV - 3 : Presque un produit scalaire

L'application $(X, Y) \mapsto \mathbf{Cov}(X, Y)$, définie sur l'espace des variables aléatoires admettant un moment d'ordre 2 est bilinéaire, symétrique, positive.
On a en effet :

- **i)** pour $(\alpha, \beta) \in \mathbb{R}^2$, $\mathbf{Cov}(\alpha X, \beta Y) = \alpha\beta\mathbf{Cov}(X, Y)$
- **ii)** $\mathbf{Cov}(X + Y, Z = \mathbf{Cov}(X, Z) + \mathbf{Cov}(Y, Z)$
- **iii)** $\mathbf{Cov}(X, Y) = \mathbf{Cov}(Y, X)$
- **iv)** $\mathbf{Cov}(X, X) = \mathbf{V}(X) \geqslant 0$
- **v)** cas particulier : $\mathbf{Cov}(\alpha X + \beta, Y) = \alpha\mathbf{Cov}(X, Y)$.

Définition IV - 5 : n-uplets

Si $(X_1, ..., X_n)$ sont des variables aléatoires discrètes à valeurs dans E, on appelle n-uplet de variables aléatoires (discrètes) la variable aléatoire discrète à valeurs dans E^n donnée par $(X_1, ..., X_n)$.
Si E est un espace vectoriel, X est appelé vecteur aléatoire discret. Lorsque E est de dimension finie, la donnée d'une base de E permet de ramener l'étude d'un vecteur aléatoire discret à celle d'un n-uplet de variables aléatoires discrètes.

Définition IV - 6 : Indépendance

On dit qu'une famille $(X_i)_{i\in I}$ de variables aléatoires discrètes est formée de variables mutuellement indépendantes si, pour toute famille $(A_i)_{i\in I}$ de parties de E, les événements $((X_i \in A_i))_{i\in I}$ sont mutuellement indépendants, i.e. pour tout sous-ensemble fini J de I, on a

$$\mathbf{P}\left(\bigcap_{i\in J}(X_i \in A_i)\right) = \prod_{i\in J}\mathbf{P}(X_i \in A_i)$$

Proposition IV - 1 : Variance d'une somme

Si $(X_1, .., X_n)$ est un n-uplet de variables aléatoires discrètes à valeurs réelles, admettant chacune une variance, alors leur somme admet une variance et on a

$$\mathbf{V}\left(X_1 + ..X_n\right) = \sum_{i=1}^{n} \mathbf{V}\left(X_i\right) + 2 \sum_{1 \leqslant i < j \leqslant n} \mathbf{Cov}(X_i, X_j)$$

En particulier si les variables sont mutuellement indépendantes, alors

$$\mathbf{V}\left(X_1 + ..X_n\right) = \sum_{i=1}^{n} \mathbf{V}\left(X_i\right)$$

Théorème IV - 2 :

a) Si X et Y sont indépendantes alors pour toutes fonctions f et g, $f(X)$ et $G(Y)$ sont indépendantes.

b) On généralise à n variables indépendantes et n fonctions.

Théorème IV - 3 : Lemme de coalition

Si X_1, X_2, . . . ,X_n sont des variables aléatoires mutuellement indépendantes, alors pour tout m compris entre 1 et $n-1$, et toutes fonctions f et g , les variables $f(X_1, ..., X_m)$ et $g(X_{m+1}, ..., X_n)$ sont indépendantes

Théorème IV - 4 : Suites de variables aléatoires discrètes

Soit $(\mathcal{L}_k)_{k\in\mathbb{N}}$ une suite de lois discrètes. Alors il existe une suite $(X_k)_{k\in\mathbb{N}}$ de variables aléatoires discrètes, mutuellement indépendantes et telles que, pour tout k dans $\mathbb{N}$, on ait $X_k \sim \mathcal{L}_k$. Autrement dit il existe un espace probabilisé $(\Omega, \mathscr{A}, \mathbf{P})$ et X un vecteur aléatoire discret défini sur $(\Omega, \mathscr{A}, \mathbf{P})$ avec $X = (X_k)_{k\in\mathbb{N}}$ et, pour tout k dans $\mathbb{N}$, $X_k \sim \mathcal{L}_k$.

V Comportement asymptotique

Théorème V - 1 : Loi faible des grands nombres

Si $(X_n)_{n\geqslant 0}$ est une suite de variables aléatoires réelles deux à deux indépendantes, de même loi et admettant un moment d'ordre 2, alors, si $S_n = \displaystyle\sum_{k=1}^{n} X_k$ et $m = \mathbf{E}(X_1)$, on a,

$$\mathbf{P}\left(\left|\frac{S_n}{n} - m\right| \geqslant \varepsilon\right) \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} 0$$

VI Fonctions génératrices

Définition VI - 1 : Fonctions génératrices

Soit X une variable aléatoire discrète à valeurs dans $\mathbb{N}$. On définit la fonction génératrice de X comme étant la somme de la série entière suivante :

$$G_X(t) = \sum_{n=0}^{+\infty} P\left(X = n\right) t^n = E\left(t^X\right)$$

La dernière égalité s'écrivant sous réserve d'existence.

Propriété VI - 1 :

Soit X une variable aléatoire discrète à valeurs dans $\mathbb{N}$ de fonction génératrice G_X

a) La série entière définissant G_X est de rayon de convergence supérieur ou égal à 1.

b) Elle converge normalement sur le disque **fermé** de centre 0 et de rayon 1.

c) La fonction G_X est de classe C^∞ sur $]-1,1[$.

d) G_X est absolument monotone sur $[0,1[$, c'est-à-dire que toutes ses dérivées sont positives. Elle est donc en particulier convexe.

e) La loi de X et G_X sont déterminées l'une par l'autre. On a en particulier :

$$\forall n \in \mathbb{N} \qquad P\left(X = n\right) = \frac{G_X^{(n)}(0)}{n!}$$

Théorème VI - 1 : Récupération des moments

Soit X une variable aléatoire discrète de fonction génératrice G_X.

a) X admet une espérance si et seulement si G_X est dérivable à gauche en 1. Dans ce cas on a de plus $E(X) = G'_X(1)$.

b) X admet une variance si et seulement si G_X est dérivable deux fois à gauche en 1 et dans ce cas $V(X) = G''_X(1) + G'_X(1) - G'_X(1)^2$, ou plus directement $G''_X(1) = E\left(X^2\right) - E\left(X\right)$

Propriété VI - 2 : Loi usuelles

a) Loi de Bernoulli : si $X \sim \mathscr{B}(p)$ alors $G_x(t) = 1 - p + pt$ et le rayon de convergence est infini.

b) Loi binomiale : si $X \sim \mathscr{B}(n,p)$ alors $G_x(t) = (1 - p + pt)^n$ et le rayon de convergence est infini

c) Loi géométrique : si $X \sim \mathscr{G}(p)$, alors $G_X(t) = \dfrac{pt}{1-(1-p)t}$ et le rayon de convergence est $\dfrac{1}{1-p}$.

d) Loi de Poisson : si $X \sim \mathscr{P}(\lambda)$ alors $G_X(t) = e^{\lambda(t-1)}$ et le rayon de convergence est infini.

Proposition VI - 1 : Fonction génératrice

Soit X et Y deux variables aléatoires à valeurs dans $\mathbb{N}$ indépendantes. Le rayon de convergence de la série définissant G_{X+Y} est supérieur ou égal au plus petit de ceux correspondant à G_X et G_Y, et on a $G_{X+Y} = G_X G_Y$ lorsque le membre de droite est défini.

On généralise à une somme finie de variables aléatoires discrètes indépendantes deux à deux.