

Endomorphismes d'un espace euclidien

MP Lycée Clemenceau

Table des matières

I	Adjoint d'un endomorphisme	2
II	Matrices orthogonales	3
III	Isométries vectorielles	3
1)	Généralités	4
2)	Cas de la dimension 2	5
3)	Réduction des isométries	5
IV	Endomorphismes autoadjoints	6

I Adjoint d'un endomorphisme

Théorème I - 1 : de représentation de Riesz

Soit $(E, (\mid))$ un espace euclidien.

Pour toute forme linéaire φ sur E il existe un et un seul vecteur $e \in E$ tel que

$$\forall x \in E \quad \varphi(x) = (e \mid x)$$

Théorème I - 2 : Adjoint

Soit $(E, (\mid))$ un espace euclidien.

Pour tout endomorphisme u de E il existe un unique endomorphisme de E , qu'on note u^* tel que

$$\forall (x, y) \in E^2 \quad (u(x) \mid y) = (x \mid u^*(y))$$

u^* est appelé adjoint de u .

Propriété I - 1 :

- L'application de $\mathcal{L}(E)$ dans $\mathcal{L}(E)$ qui à u associe u^* est linéaire.
- $\forall (u, v) \in \mathcal{L}(E)^2, (u \circ v)^* = v^* \circ u^*$.
- $\forall u \in \mathcal{L}(E), (u^*)^* = u$

Exemple I - 1 :

63 banque CCINP

Soit E un espace euclidien muni du produit scalaire $(\mid)$.

On pose pour tout $x \in E, \|x\| = \sqrt{(x \mid x)}$.

Pour tout endomorphisme u de E , on note u^* l'adjoint de u .

1. Un endomorphisme de E vérifiant, pour tout $x \in E, (u(x) \mid x) = 0$, est-il nécessairement l'endomorphisme nul?
2. Soit $u \in \mathcal{L}(E)$.
Prouver que les trois assertions suivantes sont équivalentes :
 - i) $u \circ u^* = u^* \circ u$
 - ii) $\forall (x, y) \in E^2, (u(x) \mid v(x)) = (u^*(x) \mid v^*(x))$
 - iii) $\forall x \in E, \|u(x)\| = \|u^*(x)\|$.

Proposition I - 1 : Matrice dans une base orthonormale

Soit $u \in \mathcal{L}(E)$.

Si M est la matrice de u dans une base orthonormale alors $M^\top$ est la matrice de u^* dans cette même base.

Proposition I - 2 :

Soit $u \in \mathcal{L}(E)$ et F un sous-espace vectoriel de E .

Si F est stable par u alors $F^\perp$ est stable par u^* .

II Matrices orthogonales

Définition II - 1 : Matrice orthogonale

Une matrice carrée réelle $M \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ est orthogonale si elle vérifie $M^\top M = I_n$.

Proposition II - 1 : Caractérisation

Une matrice M de $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ est orthogonale si et seulement si la famille de ses colonnes est une base orthonormale de $\mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{R})$ identifié à $\mathbb{R}^n$ muni de sa structure euclidienne canonique.

Ou encore si et seulement si la famille de ses lignes est une base orthonormale de $\mathcal{M}_{1,n}(\mathbb{R})$ identifié à $\mathbb{R}^n$ muni de sa structure euclidienne canonique.

Proposition II - 2 : Groupe orthogonal

L'ensemble des matrices orthogonales muni de la multiplication est un groupe (sous-groupe de $\mathcal{G}l_n(\mathbb{R})$) appelé groupe orthogonal.

On le note $\mathcal{O}_n(\mathbb{R})$ ou $\mathcal{O}(n)$.

Propriété II - 1 : Déterminant

Le déterminant d'une matrice orthogonale est ± 1 .

Définition II - 2 :

Une matrice orthogonale est dite positive ou directe si son déterminant est égal à 1. Dans le cas contraire on dit qu'elle est négative ou indirecte.

Définition II - 3 : Groupe spécial orthogonal

L'ensemble des matrices orthogonales de déterminant égal à 1 est un groupe appelé groupe spécial orthogonal et noté $SO_n(\mathbb{R})$ ou $SO(n)$.

Définition II - 4 : Orientation

Soit E un espace vectoriel de dimension finie. On dit qu'on définit une orientation de E par la donnée d'une base $\mathcal{B}$ qui sera alors dite directe.

Toute autre base est dite directe si son déterminant dans la base $\mathcal{B}$ est strictement positif.

Proposition II - 3 : Produit mixte

Soit $(E, (\mid))$ un espace euclidien orienté.

Si $\mathcal{B}$ et $\mathcal{B}'$ sont deux bases orthonormées directes alors les applications $\det_{\mathcal{B}}$ et $\det_{\mathcal{B}'}$ sont égales.

III Isométries vectorielles

1) Généralités

Définition III - 1 : Isométrie vectorielle

Soit $(E, (\cdot | \cdot))$ un espace euclidien. On appelle isométrie vectorielle, ou automorphisme orthogonal de E tout endomorphisme linéaire de E qui conserve la norme. C'est à dire $f \in \mathcal{L}(E)$ tel que $\forall x \in E$, $\|f(x)\| = \|x\|$.

Proposition III - 1 : Caractérisations

Soit $f \in \mathcal{L}(E)$.

a) f est une isométrie vectorielle si et seulement si elle conserve le produit scalaire :

$$\forall (x, y) \in E^2 \quad (f(x) | f(y)) = (x | y)$$

b) f est une isométrie vectorielle si et seulement si l'image par f d'une base orthonormale est une base orthonormale.

c) f est une isométrie vectorielle si et seulement si $f^* = f^{-1}$

Proposition III - 2 : Groupe orthogonal

L'ensemble des isométries vectorielles d'un espace euclidien, muni de la composition est un groupe. C'est un sous-groupe de $\mathcal{GL}(E)$ appelé groupe orthogonal et noté $\mathcal{O}(E)$.

Exemple III - 1 :

78 banque CCINP

Soit E un espace euclidien de dimension n et u un endomorphisme de E .

On note $(x|y)$ le produit scalaire de x et de y et $\|\cdot\|$ la norme euclidienne associée.

1. Soit u un endomorphisme de E , tel que : $\forall x \in E, \|u(x)\| = \|x\|$.
 - (a) Démontrer que : $\forall (x, y) \in E^2 \quad (u(x)|u(y)) = (x|y)$.
 - (b) Démontrer que u est bijectif.
2. Démontrer que l'ensemble $\mathcal{O}(E)$ des isométries vectorielles de E , muni de la loi $\circ$, est un groupe.
3. Soit $u \in \mathcal{L}(E)$. Soit $e = (e_1, e_2, \dots, e_n)$ une base orthonormée de E .
Prouver que : $u \in \mathcal{O}(E) \iff (u(e_1), u(e_2), \dots, u(e_n))$ est une base orthonormée de E .

Définition III - 2 :

On dit qu'une isométrie est positive ou directe, respectivement négative ou indirecte, si son déterminant est strictement positif, respectivement négatif.

L'ensemble des isométries positives est un sous-groupe de $\mathcal{O}(E)$ appelé groupe spécial orthogonal de E et noté $\mathcal{SO}(E)$.

2) Cas de la dimension 2

Proposition III - 3 :

Dans $\mathcal{M}_2(\mathbb{R})$ les matrices orthogonales sont de la forme :

– si $\det(M) = 1$

$$\exists \theta \in \mathbb{R} \quad \text{tel que} \quad \begin{pmatrix} \cos(\theta) & -\sin(\theta) \\ \sin(\theta) & \cos(\theta) \end{pmatrix}$$

– si $\det(M) = -1$

$$\exists \theta \in \mathbb{R} \quad \text{tel que} \quad \begin{pmatrix} \cos(\theta) & \sin(\theta) \\ \sin(\theta) & -\cos(\theta) \end{pmatrix}$$

Définition III - 3 : Rotation vectorielle

On appelle rotation vectorielle du plan euclidien toute isométrie directe du plan.

Proposition III - 4 :

L'application de $\mathbb{R}$ dans $SO_2(\mathbb{R})$ qui à t associe $\begin{pmatrix} \cos(\theta) & -\sin(\theta) \\ \sin(\theta) & \cos(\theta) \end{pmatrix}$ est un morphisme de groupe.

Ce morphisme est surjectif et son noyau est $\{2k\pi, k \in \mathbb{Z}\}$.

Corollaire III - 1 :

Le groupe $SO_2(\mathbb{R})$ est commutatif et isomorphe à $\mathbb{U}$.

Proposition III - 5 : Classification des isométries du plan

Une isométrie du plan est :

- une rotation
- une symétrie orthogonale (réflexion)

3) Réduction des isométries

Proposition III - 6 : Spectre

Le spectre d'une isométrie vectorielle est inclus dans $\{-1, 1\}$.

Proposition III - 7 : Stabilité de l'orthogonal

Si F est un sous espace stable par une isométrie u alors son orthogonal aussi stable par u .

Proposition III - 8 : Sous espaces stables

Tout endomorphisme d'un $\mathbb{R}$ -espace vectoriel admet au moins une droite ou un plan stable

Théorème III - 1 : Décomposition d'une isométrie dans une base orthonormale

Si $u \in \mathcal{O}(E)$ il existe une base orthonormale de E dans la quelle la matrice de u est diagonale par blocs de bloc dans $\{(1), (-1)\} \cup \left\{ \begin{pmatrix} \cos(\theta) & -\sin(\theta) \\ \sin(\theta) & \cos(\theta) \end{pmatrix}, \theta \in \mathbb{R} \right\}$

Corollaire III - 2 : Matrices orthogonales

Si $A \in \mathcal{O}(n)$ alors il existe une matrice $P \in \mathcal{O}(n)$ et une matrice B diagonale par blocs de bloc dans $\{(1), (-1)\} \cup \left\{ \begin{pmatrix} \cos(\theta) & -\sin(\theta) \\ \sin(\theta) & \cos(\theta) \end{pmatrix}, \theta \in \mathbb{R} \right\}$ telles que $A = PB^tP$.

IV Endomorphismes autoadjoints**Définition IV - 1 : Endomorphisme symétrique**

Soit $u \in \mathcal{L}(E)$, on dit que u est un endomorphisme autoadjoint si $u = u^*$

Proposition IV - 1 : Espace $\mathcal{S}(E)$

L'ensemble des endomorphismes autoadjoints est un sous espace vectoriel de $\mathcal{L}(E)$ noté $\mathcal{S}(E)$.

Proposition IV - 2 : Lien avec les matrices symétriques

Un endomorphisme de E est autoadjoint si et seulement si sa matrice dans une base orthonormale est symétrique.

Proposition IV - 3 : Noyau et image

L'image et le noyau d'un endomorphisme autoadjoint sont supplémentaires orthogonaux

Proposition IV - 4 : Projecteurs orthogonaux

Un projecteur de E est orthogonal si et seulement si il est autoadjoint.

Proposition IV - 5 : Stabilité

Soit $f \in \mathcal{S}(E)$ et F un sous espace vectoriel de E .

Si F est stable par f alors $F^\perp$ est aussi stable par f .

Proposition IV - 6 : Sous espaces propres

Soit $f \in \mathcal{S}(E)$. Ses sous espaces propres sont en somme directe orthogonale.

Proposition IV - 7 : Polynôme caractéristique

Le polynôme caractéristique d'un endomorphisme autoadjoint est scindé dans $\mathbb{R}$

Théorème IV - 1 : Théorème spectral

Si u est un endomorphisme d'un espace euclidien E , alors u est autoadjoint si et seulement si E est somme orthogonale des sous-espaces propres de u ou, de manière équivalente, s'il existe une base orthonormée diagonalisant u .

Théorème IV - 2 : spectral pour les matrices

Soit $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$. Si A est une matrice symétrique alors il existe une matrice D diagonale et une matrice $P \in \mathcal{O}(n)$ telles que $A = PD^tP$.

Définition IV - 2 : Endomorphismes autoadjoints positifs

Soit $u \in \mathcal{S}(E)$. On dit que u est positif, respectivement défini positif si pour tout $x \in E$, $(u(x) | x) \geq 0$, respectivement $(u(x) | x) > 0$.

Notation :

L'ensemble des endomorphismes autoadjoints positifs, respectivement définis positifs, est noté $\mathcal{S}^+(E)$, respectivement $\mathcal{S}^{++}(E)$.

Proposition IV - 8 :

$u \in \mathcal{S}(E)$ est positif, respectivement défini positif, si et seulement si son spectre est inclus dans $\mathbb{R}_+$, respectivement dans $\mathbb{R}_+^*$.

Définition IV - 3 : Matrices symétriques positives

Une matrice M symétrique réelle est dite positive, respectivement définie positive, si pour tout $X \in \mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{R})$, $X^tAX \geq 0$, respectivement $X^tAX > 0$.

Notation :

L'ensemble des matrices symétriques réelles positives, respectivement définies positives, est noté $\mathcal{S}_n^+(\mathbb{R})$, respectivement $\mathcal{S}_n^{++}(\mathbb{R})$.

Proposition IV - 9 :

Une matrice symétrique réelle est positive, respectivement définie positive, si et seulement si son spectre est inclus dans $\mathbb{R}_+$, respectivement dans $\mathbb{R}_+^*$.

Exemple IV - 1 :**66 babque CCINP**

1. Soit $A \in \mathcal{S}_n(\mathbb{R})$. Prouver que $A \in \mathcal{S}_n^+(\mathbb{R}) \iff (A) \in [0, +\infty[$
2. Prouver que pour tout $A \in \mathcal{S}_n(\mathbb{R})$, $A^2 \in \mathcal{S}_n^+(\mathbb{R})$
3. Prouver que pour tout $A \in \mathcal{S}_n(\mathbb{R})$ et tout $B \in \mathcal{S}_n^+(\mathbb{R})$, $AB = BA \Rightarrow A^2B \in \mathcal{S}_n(\mathbb{R})$
4. Soit $A \in \mathcal{S}_n^+(\mathbb{R})$.
Prouver qu'il existe $B \in \mathcal{S}_n^+(\mathbb{R})$ telle que $A = B^2$.