Rappels sur les espaces préhilbertiens réels

MP Lycée Clemenceau

Table des matières

I Produit scalaire

Définition I - 1 : Produit scalaire

Soit E une espace vectoriel sur $\mathbb{R}$, on appelle produit scalaire sur E toute application φ de E^2 dans $\mathbb{R}$ (forme) bilinéaire symétrique définie positive.
C'est à dire qu'elle vérifie

a) φ est une application bilinéaire de E^2 dans $\mathbb{R}$:

$$\forall x \in E \quad \varphi(x,.) : \begin{array}{ccc} E & \to & \mathbb{R} \\ y & \mapsto & \varphi(x,y) \end{array} \text{ est linéaire}$$

$$\forall y \in E \quad \varphi(.,y) : \begin{array}{ccc} E & \to & \mathbb{R} \\ x & \mapsto & \varphi(x,y) \end{array} \text{ est linéaire}$$

b) φ est symétrique :

$$\forall (x,y) \in E^2 \qquad \varphi(x,y) = \varphi(y,x)$$

c) φ est définie positive :

$$\forall x \in E \qquad \varphi(x,x) \geqslant 0 \text{ et } (\varphi(x,x) = 0 \Leftrightarrow (x = 0))$$

Remarque : Notations

On note le plus souvent le produit scalaire de x et y, $(x \mid y)$ ou encore $\langle x, y\rangle = \langle x \mid y\rangle = x \cdot y$

Définition I - 2 : Espace préhilbertien réel

On appelle espace préhilbertien réel tout espace vectoriel réel muni d'un produit scalaire.
C'est à dire tout couple $(E, (\mid))$.

Définition I - 3 : Espaces euclidiens

On appelle espace euclidien tout espace préhilbertien réel de dimension finie.

Définition I - 4 : Norme et distance associée

Soit $(E, (\mid))$ un espace préhilbertien réel.
On appelle norme associée au produit scalaire l'application de E dans $\mathbb{R}^+$ définie par

$$\forall x \in E \qquad \|x\| = \sqrt{(x \mid x)}$$

On définit aussi la distance associée par : $\forall (x,y) \in E^2 \qquad d(x,y) = \|x - y\|$

Proposition I - 1 : Inégalité de Cauchy [a] -Schwarz [b]

Soit $(E, (|))$ un espace préhilbertien réel, soient x et y deux vecteurs de E, alors on a

$$(x \mid y)^2 \leqslant (x \mid x)\,(y \mid y)$$

ou encore

$$|(x \mid y)| \leqslant \|x\|\,\|y\|$$

De plus il y a égalité si et seulement si la famille (x, y) est liée.

a. Augustin Louis, baron Cauchy (21 août 1789 à Paris - 23 mai 1857 à Sceaux (Hauts-de-Seine)) est un mathématicien français. Il fut l'un des mathématiciens les plus prolifiques, derrière Euler, avec près de 800 parutions. Malgré tout, la négligence dont fit preuve Cauchy envers les travaux d'Évariste Galois et de Niels Abel, perdant leurs manuscrits, a entaché son prestige.

b. Hermann Amandus Schwarz est né le 25 janvier 1843 en Pologne et est mort le 30 novembre 1921 à Berlin. C'est un mathématicien célèbre dont les travaux sont marqués par une forte interaction entre l'analyse et la géométrie. Il a travaillé à Halle, Göttingen puis à Berlin, sur des sujets allant de la théorie des fonctions à la géométrie différentielle en passant par le calcul des variations

Proposition I - 2 : Inégalité triangulaire

Soit $\left(E, \left(\,\middle|\,\right)\right)$ un espace préhilbertien.

$$\forall\,(x, y) \in E^2 \qquad \|x + y\| \leqslant \|x\| + \|y\|$$

Il y a égalité si et seulement si il existe $t \in \mathbb{R}_+$ tel que $x = ty$ ou $y = tx$.

Proposition I - 3 :

Soit $\left(E, \left(\,\middle|\,\right)\right)$ un espace préhilbertien.
Pour tout $(x, y) \in E^2$, on a

$$\begin{aligned} \|x + y\|^2 &= \|x\|^2 + \|y\|^2 + 2\,(x \mid y) \\ \|x - y\|^2 &= \|x\|^2 + \|y\|^2 - 2\,(x \mid y) \end{aligned}$$

identité du parallèlogramme

$$\|x + y\|^2 + \|x - y\|^2 = 2\left(\|x\|^2 + \|y\|^2\right)$$

identités de polarisation

$$(x \mid y) = \frac{1}{4}\left(\|x + y\|^2 - \|x - y\|^2\right)$$

$$2\left(x \,\middle|\, y\right) = \|x + y\|^2 - \|x\|^2 - \|y\|^2$$

II Orthogonalité

Définition II - 1 : Vecteurs orthogonaux

Soit $\left(E, \left(\,\middle|\,\right)\right)$ un espace préhilbertien.
Deux vecteurs u et v de E sont dits orthogonaux si $(u \mid v) = 0$

Définition II - 2 : Orthogonal d'une partie

Soit X une partie non vide d'un espace préhilbertien $\left(E, \left(\ \middle|\ \right)\right)$, l'ensemble des vecteurs $x \in E$ tel que pour tout $y \in X$, $\left(x \middle| y\right) = 0$, est appelé orthogonal de X.

Propriété II - 1 : Structure

L'orthogonal d'une partie non vide X d'un espace préhilbertien $\left(E, \left(\middle|\right)\right)$ est un sous espace vectoriel de E qu'on note $X^{\perp}$.

Définition II - 3 : Famille

Soit $\left(E, \left(\middle|\right)\right)$ un espace préhilbertien.
Une famille de vecteurs $(v_i)_{i\in[\![1,p]\!]}$ est dite orthogonale si pour tout $(i,j) \in [\![1,p]\!]^2$ tel que $i \neq j$,

$$\left(v_i \middle| v_j\right) = 0.$$

Si de plus on a pour tout $i \in [\![1,p]\!]$ $\|v_i\| = 1$, alors on dit qu'elle est orthonormale (ou orthonormée).

Proposition II - 1 :

Soit $(x_i)_{i\in[1,n]}$ une famille finie de vecteurs de E.
Si cette famille est orthogonale alors

$$\left\|\sum_{i=1}^{n} x_i\right\|^2 = \sum_{i=1}^{n} \|x_i\|^2$$

Proposition II - 2 :

Toute famille orthogonale de vecteurs non nuls est libre.

Théorème II - 1 : Orthonormalisation de Gram-Schmidt

Soient $(e_i)_{i\in[\![1,n]\!]}$ une famille libre de vecteurs d'un espace vectoriel préhilbertien réel.
On considère les sous espaces associés :

$$\forall k \in [\![1,n]\!] \quad F_k = Vect\left((e_i)_{i\in[\![1,k]\!]}\right)$$

Il existe un famille orthonormale $(\varepsilon_k)_{k\in[\![1,n]\!]}$ de vecteurs de E telle que

$$\forall k \in [\![1,n]\!] \quad F_k = Vect\left((\varepsilon_i)_{i\in[\![1,k]\!]}\right)$$

Cette famille est unique si on impose de plus $\forall k \in [\![1,n]\!]$, $\left(\varepsilon_k \middle| e_k\right) > 0$

Proposition II - 3 : Bases orthonormales

— Tout espace euclidien possède au moins une base orthonormale.
— Toute famille orthonormale peut être complétée en une base orthonormale.

Propriété II - 2 : Dans une base orthonormale

Soit $(E, (\mid))$ un espace euclidien. Si $(e_i)_{i\in[\![1,n]\!]}$ est une base orthonormale de E alors on a

a) $\forall x \in E, \quad x = \displaystyle\sum_{i=1}^{n} (e_i \mid x)\, e_i.$

b) $\forall (x,y) \in E^2$ tel que $x = \displaystyle\sum_{i=1}^{n} x_i e_i$ et $y = \displaystyle\sum_{i=1}^{n} y_i e_i, \quad (x \mid y) = \displaystyle\sum_{i=1}^{n} x_i y_i.$

c) $\forall x \in E$ tel que $x = \displaystyle\sum_{i=1}^{n} x_i e_i, \quad \|x\| = \sqrt{\displaystyle\sum_{i=1}^{n} x_i^2}.$

III Projection orthogonale

Proposition III - 1 : Supplémentaire orthogonal

Soit $(E, (\mid))$ une espace préhilbertien réel (de dimension quelconque). Soit F un sous espace vectoriel de E de dimension finie.
$F^{\perp}$ est alors un sous espace supplémentaire de F appelé supplémentaire orthogonal de F

Corollaire III - 1 : Dimension finie

Si $(E, (\mid))$ est un espace euclidien alors pour tout sous espace vectoriel F on a $F \oplus F^{\perp} = E$.

Propriété III - 1 : Dimension du supplémentaire

Soit $(E, (\mid))$ un espace euclidien. On a $\dim(E) = \dim(F) + \dim\left(F^{\perp}\right)$

Définition III - 1 : Vecteur normal à un hyperplan

Soit $(E, (\mid))$ un espace euclidien. Si F est un hyperplan de E, on appelle vecteur normal à F tout vecteur non nul de $F^{\perp}$

Définition III - 2 : Projection orthogonale

Soit $(E, (\mid))$ un espace préhilbertien et F un sous espace vectoriel de dimension finie.
On appelle projection orthogonale sur F la projection associée à la somme directe $F \oplus F^{\perp} = E$.

Propriété III - 2 : Expression dans une base orthonormée

Soit F un sous espace vectoriel de dimension finie de E. Si $(e_i)_{iu\in[\![1,p]\!]}$ est une base orthonormale de F alors la projection orthogonale sur F est définie par

$$x \mapsto \sum_{i=1}^{p} (e_i \mid x)\, e_i$$

Définition III - 3 : Distance d'un vecteur à un sous espace de dimension finie

Soit $\big(E, (\mid)\big)$ un espace préhilbertien réel. Soit F une sous espace vectoriel de dimension finie de E et x un vecteur de E. On appelle distance de x à F la quantité $\inf\{d(x,y)/y \in F\}$.

Proposition III - 2 :

Soit F une sous espace vectoriel de dimension finie de E et x un vecteur de E.

$$\exists a \in F \quad \text{tel que} \quad \inf\{d(x,y)/y \in F\} = d(x,a)$$

De plus $p_F(x)$ est le seul vecteur qui réalise ce minimum.
C'est-à-dire $a \in F$ vérifie $d(x,F) = d(x,a)$ si et seulement si $a = p_F(x)$
On a donc $d(x,F) = \|x - p_F(x)\|$
On a aussi $d(x,F)^2 = \|x\|^2 - \|p_F(x)\|^2$.

Proposition III - 3 :

Soit $\big(E, (\mid)\big)$ un espace euclidien et u un vecteur non nul de E.
$Vect(u)^{\perp}$ est un hyperplan de E.
Pour tout $x \in E$, le projeté orthogonal de x sur $Vect(u)^{\perp}$ est $x - \dfrac{(u \mid x)}{(u \mid u)}u$ et la distance de x à cet hyperplan est $\dfrac{|(u \mid x)|}{\|u\|}$