Séries génératrices

Définition - 1 : Fonctions génératrices

Soit X une variable aléatoire discrète à valeurs dans $\mathbb{N}$. On définit la fonction génératrice de X comme étant la somme de la série entière suivante :

$$G_X(t) = \sum_{n=0}^{+\infty} P(X=n)\, t^n = E\left(t^X\right)$$

La dernière égalité s'écrivant sous réserve d'existence.

Propriété - 1 :

Soit X une variable aléatoire discrète à valeurs dans $\mathbb{N}$ de fonction génératrice G_X

a) La série entière définissant G_X est de rayon de convergence supérieur ou égal à 1.

b) Elle converge normalement sur le disque **fermé** de centre 0 et de rayon 1.

c) La fonction G_X est de classe C^∞ sur $]-1,1[$.

d) G_X est absolument monotone sur $[0,1[$, c'est-à-dire que toutes ses dérivées sont positives. Elle est donc en particulier convexe.

e) La loi de X et G_X sont déterminées l'une par l'autre. On a en particulier :

$$\forall n \in \mathbb{N} \qquad P(X=n) = \frac{G_X^{(n)}(0)}{n!}$$

Théorème - 1 : Récupération des moments

Soit X une variable aléatoire discrète de fonction génératrice G_X.

a) X admet une espérance si et seulement si G_X est dérivable à gauche en 1. Dans ce cas on a de plus $E(X) = G'_X(1)$.

b) X admet une variance si et seulement si G_X est dérivable deux fois à gauche en 1 et dans ce cas $V(X) = G''_X(1) + G'_X(1) - G'_X(1)^2$, ou plus directement $G''_X(1) = E\left(X^2\right) - E(X)$

Propriété - 2 : Loi usuelles

a) Loi de Bernoulli : si $X \sim \mathscr{B}(p)$ alors $G_x(t) = 1-p+pt$ et le rayon de convergence est infini.

b) Loi binomiale : si $X \sim \mathscr{B}(n,p)$ alors $G_x(t) = (1-p+pt)^n$ et le rayon de convergence est infini

c) Loi géométrique : si $X \sim \mathscr{G}(p)$, alors $G_X(t) = \dfrac{pt}{1-(1-p)t}$ et le rayon de convergence est $\dfrac{1}{1-p}$.

d) Loi de Poisson : si $X \sim \mathscr{P}(\lambda)$ alors $G_X(t) = e^{\lambda(t-1)}$ et le rayon de convergence est infini.

Proposition - 1 : Fonction génératrice d'une somme

Soit X et Y deux variables aléatoires à valeurs dans $\mathbb{N}$ indépendantes. Le rayon de convergence de la série définissant G_{X+Y} est supérieur ou égal au plus petit de ceux correspondant à G_X et G_Y, et on a $G_{X+Y} = G_X G_Y$ lorsque le membre de droite est défini.
On généralise à une somme finie de variables aléatoires discrètes indépendantes deux à deux.