Séries entières

MP Lycée Clemenceau

Table des matières

I Généralités

1) Définitions

Définition I - 1 :

Une série entière d'une variable complexe est une série de fonctions de la forme $z \to a_n z^n$, avec $n \in \mathbb{N}$.
La série est alors notée $\sum a_n z^n$, z étant la variable complexe.

Définition I - 2 : Opérations

On définit les opérations suivantes sur les séries entières :

1) l'addition :
$$\sum a_n.z^n + \sum a'_n.z^n = \sum \left(a_n + a'_n\right).z^n$$

2) le produit extérieur (par un nombre complexe)
$$\lambda.\sum a_n.z^n = \sum \lambda.a_n.z^n$$

3) le produit : on utilise alors le produit de Cauchy (qu'on appelle aussi produit de convolution)
$$\left(\sum a_n.z^n\right)\left(\sum a'_n.z^n\right) = \sum c_n.z^n$$
$$\text{avec } c_n = \sum_{i=0}^{n} a_i.a'_{n-i}$$

Théorème I - 1 : Lemme d'Abel [a]

Soit $z_0 \in \mathbb{C}$, non nul, si la suite $(a_n z_0^n)$ est bornée alors, pour tout nombre complexe z tel que $|z| < |z_0|$, la série $\sum a_n z^n$ est absolument convergente.

a. Niels Henrik Abel (5 août 1802 à Frindoë près de Stavanger - 6 avril 1829, à Christiana, auj. Oslo) est un mathématicien norvégien. Il est connu pour ses travaux en analyse mathématique sur la semi-convergence des séries numériques, des suites et séries de fonctions, les critères de convergence d'intégrale généralisée, sur la notion d'intégrale elliptique ; en algèbre, sur la résolution des équations.

Définition I - 3 : Rayon de convergence

Soit $\sum a_n z^n$ une série entière d'une variable complexe ou réelle. Son rayon de convergence est alors
$$R = \sup\left\{r \in \mathbb{R}_+, \quad / \quad (a_n r^n)_{n\in\mathbb{N}} \text{ est bornée}\right\}$$

Définition I - 4 : Disque ouvert de convergence

Soit $\sum a_n z^n$ une série entière de rayon de convergence R non nul. On appelle disque ouvert de convergence l'ensemble
$$D_R = \{z \in \mathbb{C} \quad / \quad |z| < R\}$$

Définition I - 5 : Intervalle ouvert de convergence

Soit $\sum a_n x^n$ une série entière réelle de rayon de convergence R non nul. On appelle intervalle ouvert de convergence l'intervalle $]-R, R[$.

Théorème I - 2 :

La série entière $\sum a_n z^n$, de rayon convergence R non nul, est absolument convergente pour tout $z \in D_R$.
Elle est grossièrement divergente si $|z| > R$.

2) Calculs du rayon de convergence

Théorème I - 3 :

Soit $\sum a_n z^n$ une série entière d'une variable complexe ou réelle. Son rayon de convergence est alors défini par l'une des valeurs suivantes :

a) $\sup \{|z|, z \in \mathbb{C} \quad / \quad \sum |a_n| |z^n| \text{ converge } \}$

b) $\sup \{|z|, z \in \mathbb{C} \quad / \quad \sum a_n z^n \text{ converge } \}$

c) $\sup \{|z|, z \in \mathbb{C} \quad / \quad (a_n z^n)_{n \in \mathbb{N}} \text{ est bornée}\}$

d) $\sup \left\{|z|, z \in \mathbb{C} \quad / \quad \lim\limits_{n \to +\infty} (a_n z^n) = 0\right\}$

Proposition I - 1 : Comparaison

Soit $\sum a_n z^n$ et $\sum b_n z^n$ deux séries entières de rayons respectifs R_a et R_b.
Si $a_n = O(b_n)$, en particulier si $a_n = o(b_n)$, alors $R_a \geqslant R_b$.
Si $a_n \sim b_n$, alors $R_a = R_b$.

Proposition I - 2 :

Soit $\alpha \in \mathbb{R}$, le rayon de convergence de la série entière $\sum n^\alpha z^n$ est égal à 1.

Proposition I - 3 :

Soit $(a_n)_{n \in \mathbb{N}}$ une suite complexe. Les séries entières $\sum a_n z^n$ et $\sum n a_n z^n$ ont même rayon de convergence.

Théorème I - 4 : Méthode pratique par la règle de D'Alembert

soit $\sum a_n z^n$ une série entière d'une variable complexe ou réelle.
Si on a l'existence de la limite suivante

$$\lim_{n \to +\infty} \left|\frac{a_{n+1}}{a_n}\right| = \ell$$

alors son le rayon de convergence est $\dfrac{1}{\ell}$, si $\ell \neq 0$, $+\infty$ si $\ell = 0$ et 0 si $\ell = +\infty$.

Exemple I - 1 :

Exercice 20 banque CCINP

1. Donner la définition du rayon de convergence d'une série entière de la variable complexe.
2. Déterminer le rayon de convergence de chacune des séries entières suivantes :

   (a) $\sum \frac{(n!)^2}{(2n)!} z^{2n+1}$.

   (b) $\sum n^{(-1)^n} z^n$.

   (c) $\sum \cos n z^n$.

3) Opérations

Proposition I - 4 : Somme

Soient $\sum a_n z^n$ et $\sum b_n z^n$ deux séries entières de rayons de convergences respectifs R_1 et R_2.
La série $\sum (a_n + b_n) z^n$ a un rayon de convergence R qui vérifie

$$\begin{array}{lcll} \text{si } R_1 & \neq & R_2 & R = \inf(R_1, R_2) \\ \text{si } R_1 & = & R_2 & R \geq \inf(R_1, R_2) \end{array}$$

Proposition I - 5 :

Soit $\lambda \in \mathbb{C}^*$. Le rayon de convergence de $\sum \lambda a_n z^n$ est le même que celui de $\sum a_n z^n$

Proposition I - 6 : Produit

Le rayon de convergence r du produit de Cauchy de deux séries entières de rayon de convergence respectif R_1 et R_2 vérifie $R \geq \inf(R_1, R_2)$

II propriétés

1) Continuité

Théorème II - 1 :

Si la série entière a un rayon de convergence non nul R, elle est normalement convergente sur tout compact du disque ouvert de convergence.
En particulier elle est normalement convergente sur tout disque fermé de centre 0 contenu dans le disque ouvert de convergence.

Proposition II - 1 : Continuité

La fonction définie par la série entière est continue sur le disque ouvert de convergence.

2) Cas des séries entières réelles

Théorème II - 2 : d'Abel radial

Soit $\sum a_n x^n$ une série entière réelle. Si $\sum a_n x^n$ a pour rayon de convergence $R \in \mathbb{R}_+^*$ et si $\sum a_n R^n$ converge, alors $\displaystyle\sum_{n=0}^{+\infty} a_n x^n \underset{x \to R^-}{\longrightarrow} \sum_{n=0}^{+\infty} a_n R^n$.

Théorème II - 3 : Intégration

Soit $\sum a_n x^n$ une série entière d'une variable réelle de rayon de convergence $r > 0$.
On a alors, pour tout x tel que $|x| < r$

$$\int_0^x \left(\sum_{n=0}^{+\infty} a_n . t^n \right) dt = \sum_{n=0}^{+\infty} \int_0^x a_n t^n dt = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{a_n}{n+1} x^{n+1}$$

Proposition II - 2 : Primitive

Soit f une fonction définie par une série entière $\sum a_n x^n$ de rayon de convergence $R > 0$. Toute primitive de f est définie par une série entière de même rayon de convergence.

Proposition II - 3 : Dérivation

Toute fonction f définie par une série entière $\sum a_n x^n$ de rayon de convergence $R > 0$ est de classe $\mathscr{C}^\infty$ sur son disque ouvert de convergence.
De plus on a, pour tout x dans le disque ouvert de convergence,

$$\forall k \in \mathbb{N} \quad f^{(k)}(x) = \sum_{n=k}^{+\infty} \frac{n!}{(n-k)!} a_n x^{n-k} = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{(n+k)!}{n!} a_{n+k} x^n$$

Autrement dit on a, pour tout $n \in \mathbb{N}$ $a_n = \frac{1}{n!} D^n(f)(0)$

Corollaire II - 1 : Unicité

Si les fonctions $x \mapsto \displaystyle\sum_{n=0}^{+\infty} a_n x^n$ et $x \mapsto \displaystyle\sum_{n=0}^{+\infty} b_n x^n$ coïncident sur un intervalle $]0, \alpha]$ avec $\alpha > 0$, alors, pour tout $n \in \mathbb{N}$, $a_n = b_n$.

III Fonction développable en série entière.

1) Généralité

Définition III - 1 : Fonction développable en série entière

Soit f une fonction d'une variable réelle est dite développable en série entière sur $]-r, r[$, si il existe une série entière $\sum a_n x^n$ de rayon de convergence $R \geq r$ telle que pour tout $x \in]-r, r[$

$$f(x) = \sum_{n=0}^{+\infty} a_n . x^n$$

Proposition III - 1 :

Une fonction développable en série entière est infiniment dérivable sur un voisinage de 0.

Définition III - 2 : Série de Taylor

On appelle série de Taylor d'une fonction f de classe $\mathscr{C}^\infty$ sur un voisinage de 0, la série entière

$$\sum \frac{f^{(n)}(0)}{n!} x^n$$

Théorème III - 1 :

Si une fonction f est développable en série entière alors elle de classe $\mathscr{C}^\infty$ au voisinage de 0 et est égale, sur ce voisinage, à sa série de Taylor.

2) Développements usuels et méthodes