Probabilités

MP Lycée Clemenceau

Table des matières

I Ensembles dénombrables **2**

II Rappel : familles sommables **3**
1) Famille de réels positifs 3
2) Famille de complexes 4

III Probabilités **6**
1) Espaces probabilisés 6
2) Espaces probabilisés discrets 8
3) Conditionnement et indépendance 9
4) Espaces probabilisés discrets 10

I Ensembles dénombrables

Définition I - 1 : Rappel : ensemble fini
Un ensemble est fini s'il est vide ou s'il existe un entier n non nul et une bijection de E dans $[\![1, n]\!]$.
n est alors le cardinal de l'ensemble.
Le cardinal de l'ensemble vide est 0.

Définition I - 2 : Dénombrable
On dit qu'un ensemble E non vide est **dénombrable** si il existe une bijection de $\mathbb{N}$ vers E.
Un ensemble est **au plus dénombrable** lorsqu'il est fini ou dénombrable.

Propriété I - 1 : Parties de $\mathbb{N}$
Les parties de $\mathbb{N}$ sont au plus dénombrables.
Plus exactement une partie de $\mathbb{N}$ est finie ou, sinon, il existe une unique bijection strictement croissante de $\mathbb{N}$ dans cette partie.

Corollaire I - 1 :
Un ensemble non vide est au plus dénombrable s'il est en bijection avec une partie non vide de $\mathbb{N}$.
Ou encore, E est au plus dénombrable si et seulement si il existe un injection de E dans $\mathbb{N}$, ou encore si et seulement si il existe une surjection de $\mathbb{N}$ dans E.

Propriété I - 2 :
Tout sous ensemble d'un ensemble dénombrable est au plus dénombrable.

Proposition I - 1 : $\mathbb{N} \times \mathbb{N}$
L'ensemble $\mathbb{N} \times \mathbb{N}$ est dénombrable.

Proposition I - 2 : Produit cartésien fini d'ensembles dénombrables
Le produit cartésien fini d'ensembles dénombrable est dénombrable.

Proposition I - 3 : Réunion
Une réunion finie ou dénombrable d'ensembles finis ou dénombrables est finie ou dénombrable.

Proposition I - 4 : $\mathbb{Z}$, $\mathbb{Q}$
Les ensembles $\mathbb{Z}$ et $\mathbb{Q}$ sont dénombrables.

Proposition I - 5 : $\{0, 1\}^{\mathbb{N}}$
L'ensemble des applications de $\mathbb{N}$ dans $\{0, 1\}$ n'est pas dénombrable.

Corollaire I - 2 : $\mathbb{R}$
l'ensemble $[0,1]$ n'est pas dénombrable et par suite $\mathbb{R}$ n'est pas dénombrable.

II Rappel : familles sommables

1) Famille de réels positifs

Définition II - 1 : Somme d'une famille de réels positifs
On considère une famille $(u_i)_{i\in I}$ de réels positifs, indexée par I (ensemble quelconque non vide).
On appelle somme de la famille l'élément de $[0,+\infty]$:

$$\sum_{i\in I} u_i = \sup\left\{\sum_{i\in J} u_i / J \subset I, |J| < +\infty\right\}$$

Définition II - 2 : Sommabilité dans le cas positif
La famille $(u_i)_{i\in I}$ est dite sommable si sa somme est finie.
Si la famille $(u_i)_{i\in I}$ n'est pas sommable, sa somme est $+\infty$.

Proposition II - 1 : Somme et produit par un scalaire positif
Soient $(u_i)_{i\in I}$ et $(v_i)_{i\in I}$ deux familles de réels positifs indexées par le même ensemble I . Si ces deux familles sont sommables alors la famille $(u_i+v_i)_{i\in I}$ est aussi sommable.
De plus on a $\displaystyle\sum_{i\in I} u_i + v_i = \sum_{i\in I} u_i + \sum_{i\in I} v_i$.
Si λ est un réel positif et si $(u_i)_{i\in I}$ est une famille sommable, alors $(\lambda u_i)_{i\in I}$ est aussi sommable et de plus $\displaystyle\sum_{i\in I} \lambda u_i = \lambda \sum_{i\in I} u_i$.

Théorème II - 1 : Sommation par paquets
Si I est la réunion disjointe des I_j, pour $j\in J$ et $(u_i)_{i\in I}$ une famille de réels positifs, alors

$$\sum_{j\in J}\left(\sum_{i\in I_j} u_i\right) = \sum_{i\in I} u_i$$

Théorème II - 2 : Fubini discret positif
Soit $(u_{i,j})_{(i,j)\in I\times J}$ une famille de réelle positif, on a :

$$\sum_{i\in I}\left(\sum_{j\in J} u_{i,j}\right) = \sum_{(i,j)\in I\times J} = \sum_{j\in J}\left(\sum_{i\in I} u_{i,j}\right)$$

Proposition II - 2 : Support d'une famille sommable
Soit $(u_i)_{i\in I}$ une famille de réels positifs. Si cette famille est sommable alors l'ensemble $\{i\in I / u_i > 0\}$ est au plus dénombrable.

2) Famille de complexes

Définition II - 3 : Famille sommable de complexes

Soit $(u_i)_{i\in I}$ une famille de complexes indexée par un ensemble I. On dit que cette famille est sommable si la famille $(|u_i|)_{i\in I}$ l'est.

L'ensemble des familles de complexes indexées par I sommables est noté $\ell^1(I)$.

Proposition II - 3 :

a) Soit $(u_i)_{i\in I}$ une famille de réels. Pour tout $i\in I$ on pose $u_i^+=\max\{u_i,0\}$ et $u_i^-=\max\{-u_i,0\}$. La famille $(u_i)_{i\in I}$ est sommable si et seulement si les familles $\left(u_i^+\right)_{i\in I}$ et $\left(u_i^-\right)_{i\in I}$ le sont.

b) Soit $(u_i)_{i\in I}$ une famille de complexes, cette famille est sommable si et seulement si les familles $(\Re(u_i))_{i\in I}$ et $(\Im(u_i))_{i\in I}$ le sont.

On en déduit la définition cohérente des sommes :

Définition II - 4 : Sommes

a) Si la famille de réels $(u_i)_{i\in I}$ est sommable, on pose $\displaystyle\sum_{i\in I}u_i=\sum_{i\in I}u_i^+-\sum_{i\in I}u_i^-$.

b) Si la suite de complexes $(u_i)_{i\in I}$ est sommable, on pose $\displaystyle\sum_{i\in I}u_i=\sum_{i\in I}\Re(u_i)+i\sum_{i\in I}\Im(u_i)$.

Propriété II - 1 : Espaces des familles sommables

L'ensemble des familles indexées par un ensemble I et qui sont sommables, est un espace vectoriel noté $\ell^1(I)$.

De plus l'application qui à une famille associe sa somme est linéaire.

Propriété II - 2 :

Si $(a_i)_{i\in I}$ est sommable et si $\varepsilon\in\mathbb{R}^{+*}$, il existe une partie finie F de I telle que $\displaystyle\left|\sum_{i\in I}a_i-\sum_{i\in F}a_i\right|\leqslant\varepsilon$.

Proposition II - 4 : Support d'une famille sommable

Soit $(u_i)_{i\in I}$ une famille de complexes. Si cette famille est sommable alors l'ensemble $\{i\in I/\,|u_i|>0\}$ est au plus dénombrable.

Proposition II - 5 : Inégalité triangulaire

Dans le cas d'une famille sommable $(u_i)_{i\in I}$ on a

$$\left|\sum_{i\in I}u_i\right|\leqslant\sum_{i\in I}|u_i|$$

Proposition II - 6 : Dirichlet : cas où $I = \mathbb{N}$

Si la série $\sum u_n$ est absolument convergente alors est commutativement convergente. C'est-à-dire que pour toute permutation σ de $\mathbb{N}$ la série $\sum u_{\sigma(n)}$ est aussi absolument convergente et sa somme est indépendante de σ.

Corollaire II - 1 :

Une suite d'éléments de $\mathbb{C}$ est sommable si et seulement si sa série est absolument convergente. De plus la somme ne dépend pas de l'ordre de sommation.

Théorème II - 3 : Sommation par paquets

Si I est la réunion disjointe des I_j, pour $j \in J$ et $(u_i)_{i\in I}$ une famille de complexes sommable, alors

$$\sum_{j\in J}\left(\sum_{i\in I_j} u_i\right) = \sum_{i\in I} u_i$$

Théorème II - 4 : Fubini discret

Soit $(u_{i,j})_{(i,j)\in I\times J}$ une famille de complexes sommable, on a :

$$\sum_{i\in I}\left(\sum_{j\in J} u_{i,j}\right) = \sum_{(i,j)\in I\times J} = \sum_{j\in J}\left(\sum_{i\in I} u_{i,j}\right)$$

Théorème II - 5 : Produit

Si $(a_i)_{i\in I}$ et $(b_{i'})_{i'\in I'}$ sont sommables alors $(a_i b_{i'})_{(i,i')\in I\times I'}$ est sommable et

$$\sum_{(i,i')\in I\times I'} a_i b_{i'} = \sum_{i\in I} a_i \times \sum_{i'\in I'} b_{i'}.$$

Théorème II - 6 : Produit de Cauchy de deux séries absolument convergentes

Si les séries $\sum u_n$ et $\sum v_n$ sont absolument convergentes, alors leur produit de Cauchy $\sum w_n$ l'est aussi. De plus dans ce cas $\sum_{n=0}^{+\infty} w_n = \sum_{n=0}^{+\infty} u_n \sum_{n=0}^{+\infty} v_n$.

III Probabilités

1) Espaces probabilisés

Définition III - 1 : Tribu

Soit Ω un ensemble non vide. On appelle tribu sur Ω une partie $\mathscr{A}$ de $\mathscr{P}(\Omega)$ vérifiant les propriétés suivantes :

i) $\Omega \in \mathscr{T}$

ii) Pour tout $A \in \mathscr{A}$ son complémentaire est dans $\mathscr{A}$.

iii) $\mathscr{A}$ est stable par union finie ou dénombrable :

$$\forall (A_n)_{n\in\mathbb{N}} \in \mathscr{A}^{\mathbb{N}} \qquad \bigcup_{n=0}^{+\infty} A_n \in \mathscr{A}$$

Propriété III - 1 : Intersection

Soit Ω un ensemble non vide et $\mathscr{A}$ une tribu sur Ω.

$$\forall (A_n)_{n\in\mathbb{N}} \in \mathscr{A}^{\mathbb{N}} \qquad \bigcap_{n=0}^{+\infty} A_n \in \mathscr{A}$$

Définition III - 2 : Espace probabilisable

On appelle espace probabilisable tout couple $(\Omega, \mathscr{A})$ où Ω est un ensemble quelconque et $\mathscr{A}$ une tribu sur Ω.

Dans ce cas on a les définitions suivantes :

- Ω est appelé univers ou l'espace des épreuves
- Les éléments de Ω sont les épreuves ou encore aléas, résultats de l'expérience, événements atomiques, réalisation du hasard...
- Un événement est une partie de Ω.
- Les éléments de la tribu sont les événements observables.

Définition III - 3 :

Soit $(\Omega, \mathscr{A})$ un espace probabilisable.

- On appelle événement élémentaire tout singleton élément de $\mathscr{A}$
- Soit $A \in \mathscr{A}$, on appelle événement contraire $C_\Omega A$.
- Soit $(A, B) \in \mathscr{A}^2$, $A \cup B$ est l'événement « A ou B »
- Soit $(A, B) \in \mathscr{A}^2$, $A \cap B$ est l'événement « A et B »
- Soit $(A, B) \in \mathscr{A}^2$, A et B sont incompatibles lorsque $A \cap B = \emptyset$

Définition III - 4 : Probabilité

Si $\mathscr{A}$ est une tribu sur Ω, une probabilité sur $(\Omega, \mathscr{A})$ est une application $\mathbf{P}$ définie sur $\mathscr{A}$ telle que :

i) $\forall A \in \mathscr{A}, \mathbf{P}(A) \geqslant 0$

ii) $\mathbf{P}(\Omega) = 1$

iii) pour toute suite $(A_n)_{n\in\mathbb{N}}$ d'événements deux à deux incompatibles, on ait :

$$\mathbf{P}\left(\bigcup_{n=0}^{+\infty} A_n\right) = \sum_{n=0}^{+\infty} \mathbf{P}(A_n)$$

On dit que c'est l'axiome de σ additivité

Définition III - 5 : Espace probabilisé

On appelle espace probabilisé tout triplet $(\Omega, \mathscr{A}, \mathbf{P})$.

Propriété III - 2 : élémentaires

Soit $(\Omega, \mathscr{A}, \mathbf{P})$ un espace probabilisé.
Soit $(A, B) \in \mathscr{A}^2$. On a :

- **i)** $\mathbf{P}(\emptyset) = 0$
- **ii)** $\mathbf{P}$ est à valeurs dans $[0, 1]$.
- **iii)** « croissance » : si $A \subset B$ alors $\mathbf{P}(A) \leqslant \mathbf{P}(B)$.
- **iv)** Si A et B sont incompatibles alors $\mathbf{P}(A \cup B) = \mathbf{P}(A) + \mathbf{P}(B)$.
- **v)** Si $A \subset B$ alors $\mathbf{P}(B \setminus A) = \mathbf{P}(B) - \mathbf{P}(A)$
- **vi)** $\mathbf{P}(C_\Omega A) = 1 - \mathbf{P}(A)$
- **vii)** $\mathbf{P}(B \setminus A) = \mathbf{P}(B) - \mathbf{P}(A \cap B)$
- **viii)** $\mathbf{P}(A \cup B) = \mathbf{P}(A) + \mathbf{P}(B) - \mathbf{P}(A \cap B)$.

Si $(A_i)_{i \in [\![1,n]\!]}$ est une famille finie d'événements :

- **ix)** si les événements sont deux à deux disjoints alors $\mathbf{P}(A_1 \cup A_2 \cup ... \cup A_n) = \displaystyle\sum_{k=1}^{n} \mathbf{P}(A_k)$
- **x)** dans le cas général :

$$\mathbf{P}(A_1 \cup A_2 \cup ... \cup A_n) \leqslant \sum_{k=1}^{n} \mathbf{P}(A_k)$$

On dit que $\mathbf{P}$ est sous additive.

Propriété III - 3 : Continuité croissante

si $(A_n)_{n \geqslant 0}$ est une suite d'événements, éléments de $\mathscr{A}$, croissante pour l'inclusion, alors :

$$\mathbf{P}(A_n) \underset{n \to +\infty}{\longrightarrow} \mathbf{P}\left(\bigcup_{m=0}^{+\infty} A_m\right)$$

Propriété III - 4 : Continuité décroissante

si $(A_n)_{n \geqslant 0}$ est une suite d'événements décroissante pour l'inclusion, alors :

$$\mathbf{P}(A_n) \underset{n \to +\infty}{\longrightarrow} \mathbf{P}\left(\bigcap_{m=0}^{+\infty} A_m\right)$$

Corollaire III - 1 :

Soit $(A_n)_{n \in \mathbb{N}}$ une suite d'événements, on a

$$\lim_{n \to +\infty} \mathbf{P}\left(\bigcup_{k=0}^{n} A_k\right) = \mathbf{P}\left(\bigcup_{n=0}^{+\infty} A_n\right) \quad , \quad \lim_{n \to +\infty} \mathbf{P}\left(\bigcap_{k=0}^{n} A_k\right) = \mathbf{P}\left(\bigcap_{n=0}^{+\infty} A_n\right)$$

Proposition III - 1 : σ-sous additivité ou inégalité de Boole

Pour toute suite $(A_n)_{n\in\mathbb{N}}$ d'événements (d'éléments de $\mathscr{A}$) on a

$$\mathbf{P}\left(\bigcup_{n=0}^{+\infty} A_n\right) \leqslant \sum_{n=0}^{+\infty} \mathbf{P}(A_n)$$

Remarque :
Le membre de droite de l'inégalité pouvant être $+\infty$. Il faut la comprendre comme étant la limite de la suite des sommes partielles.

Définition III - 6 : Événement négligeable, presque sûr

On appelle événement négligeable tout élément A de $\mathscr{A}$ de probabilité nulle, c'est à dire $\mathbf{P}(A) = 0$.
On appelle événement presque sûr tout élément A de $\mathscr{A}$ de probabilité égale à 1, c'est à dire $\mathbf{P}(A) = 1$.

Propriété III - 5 :

- Un événement inclus dans un événement négligeable est négligeable.
- Une réunion finie ou dénombrable d'événements négligeables est négligeable.
- Une intersection finie ou dénombrable d'événements presque sûrs est presque sûr.

Définition III - 7 : Système complet d'événements

On appelle système complet d'événements toute famille finie ou dénombrable $(A_i)_{i\in I}$ d'événements non vides vérifiant :
- Pour tout $(i,j) \in I^2$ tel que $i \neq j$, $A_i \cap A_j = \emptyset$
- $\displaystyle\bigcup_{i\in I} A_i = \Omega$

Définition III - 8 : Système quasi-complet d'événements

On appelle système quasi-complet d'événements toute famille au plus dénombrable $(A_i)_{i\in I}$ d'événements non vides telle que :
- Pour tout $(i,j) \in I^2$ tel que $i \neq j$, $A_i \cap A_j = \emptyset$
- $\mathbf{P}\left(\bigcup_{i\in I} A_i\right) = 1$

2) Espaces probabilisés discrets

Définition III - 9 : Distribution de probabilités discrète

Si Ω est un ensemble, une distribution de probabilités discrètes sur Ω est une famille d'éléments de $\mathbb{R}^+$ indexée par Ω et de somme 1.

Définition III - 10 : Support d'une distribution de probabilités discrète

On appelle support d'une distribution de probabilités discrète $(p_\omega)_{\omega\in\Omega}$ l'ensemble

$$\{\omega \in \Omega, p_\omega > 0\}$$

Propriété III - 6 :
Le support d'une distribution de probabilités discrète est au plus dénombrable.

Proposition III - 2 : Espace probabilisé discret
Soit Ω un enemble et $(p_\omega)_{\omega\in\Omega}$ une distribution de probabilités discrète sur Ω.
L'application $\mathbf{P}$ définie sur $\mathscr{P}(\Omega)$ par

$$\forall A \in \mathscr{P}(\Omega), \quad \mathbf{P}\left(A\right) = \sum_{\omega\in A} p_\omega$$

est une probabilité sur l'espace probabilisable $(\Omega, \mathscr{P}(\Omega))$.
De plus si Ω est au plus dénombrable, on obtient ainsi toutes les probabilités sur $\mathcal{P}(\Omega)$.

3) Conditionnement et indépendance

Définition III - 11 : Probabilité conditionnelle
Soit A et B deux événements tels que $\mathbf{P}(B) > 0$ (B est donc non négligeable). On appelle probabilité conditionnelle de A sachant B le réel :

$$\mathbf{P}_B\left(A\right) = \mathbf{P}\left(A|B\right) = \frac{\mathbf{P}\left(A\cap B\right)}{\mathbf{P}\left(B\right)}$$

Proposition III - 3 :
L'application définie sur $\mathscr{A}$ par $A \mapsto \mathbf{P}\left(A|B\right)$ est encore une probabilité sur $(\Omega, \mathscr{A})$.

Théorème III - 1 : Formules des probabilités composées
Si B est un événement observable non négligeable, alors pour tout événement observable A,
on a $\mathbf{P}(B\cap A) = \mathbf{P}(B)\mathbf{P}(A|B)$.
Plus généralement, si $(A_i)_{i\in[\![1,n]\!]}$ est une famille d'événements observables et que l'intersection des $n-1$ premiers n'est pas négligeable, alors

$$\mathbf{P}(A_1\cap\cdots\cap A_n) = \mathbf{P}(A_1)\mathbf{P}(A_2|A_1)\cdots\mathbf{P}(A_n|A_1\cap\cdots\cap A_{n-1})$$

Théorème III - 2 : Formule des probabilités totales
Si $(A_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est un système complet d'événements non négligeables et B un événement, alors la série $\sum \mathbf{P}\left(B\cap A_n\right)$ converge et :

$$\mathbf{P}\left(B\right) = \sum_{n=0}^{+\infty} \mathbf{P}\left(B\cap A_n\right) = \sum_{n=0}^{+\infty} \mathbf{P}\left(B|A_n\right)\mathbf{P}\left(A_n\right)$$

Théorème III - 3 : Formules de Bayes

Soit A et B deux événements observables (éléments de $\mathscr{A}$) non négligeables. On a

$$\mathbf{P}(A|B) = \frac{\mathbf{P}(A)\,\mathbf{P}(B|A)}{\mathbf{P}(B)}$$

Plus généralement, soit B un événement observable non négligeable et $(A_i)_{i\in I}$ un système complet d'événements non négligeables, tel que I soit fini ou dénombrable. On a

$$\forall i \in I \qquad \mathbf{P}(A_i|B) = \frac{\mathbf{P}(A_i)\,\mathbf{P}(B|A_i)}{\sum\limits_{j\in I}\mathbf{P}(A_j)\,\mathbf{P}(B|A_j)}$$

Définition III - 12 : Evénements indépendants

- Deux événements A et B sont indépendants si $\mathbf{P}(A\cap B) = \mathbf{P}(A)\,\mathbf{P}(B)$.
- Une famille quelconque d'événements est dite (mutuellement) indépendante si

$$\forall J \subset I \text{ finie} \qquad \mathbf{P}\left(\bigcap_{i\in J} A_i\right) = \prod_{i\in J}\mathbf{P}(A_i)$$

Propriété III - 7 :

Soit A et B deux événements de $(\Omega, \mathscr{A}, P)$.

i) Si A est un événement de probabilité non nulle, alors A et B sont indépendants si et seulement si $\mathbf{P}(B|A) = \mathbf{P}(B)$

ii) Les événements Ω et $\emptyset$ sont indépendants de tout autre événement.

iii) A est indépendant de lui même si et seulement si il est de probabilité 0 ou 1.

iv) Si A et B sont indépendants, alors A et $\overline{B}$ le sont, ainsi que $\overline{A}$ et B et, $\overline{A}$ et $\overline{B}$.

v) Si A est de probabilité nulle, alors A est indépendant de B.

4) Espaces probabilisés discrets

Définition III - 13 : Distribution de probabilités discrète

Si Ω est un ensemble, une distribution de probabilités discrètes sur Ω est une famille d'éléments de $\mathbb{R}^+$ indexée par Ω et de somme 1.

Définition III - 14 : Support d'une distribution de probabilités discrète

On appelle support d'une distribution de probabilités discrète $(p_\omega)_{\omega\in\Omega}$ l'ensemble

$$\{\omega \in \Omega, p_\omega > 0\}$$

Propriété III - 8 :

Le support d'une distribution de probabilités discrète est au plus dénombrable.

Proposition III - 4 : Espace probabilisé discret

Soit Ω un enemble et $(p_\omega)_{\omega\in\Omega}$ une distribution de probabilités discrète sur Ω.
L'application $\mathbf{P}$ définie sur $\mathscr{P}(\Omega)$ par

$$\forall A \in \mathscr{P}(\Omega), \quad \mathbf{P}\left(A\right) = \sum_{\omega\in A} p_\omega$$

est une probabilité sur l'espace probabilisable $(\Omega, \mathscr{P}(\Omega))$.
De plus si Ω est au plus dénombrable, on obtient ainsi toutes les probabilités sur $\mathcal{P}(\Omega)$.