Suites et séries de fonctions

MP Lycée Clemenceau

Table des matières

Les fonctions sont définies d'une partie non vide d'un espace vectoriel de dimension finie et à valeurs dans un espace vectoriel normé de dimension finie.

I Définitions

Définition I - 1 : Convergence simple

Soit $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite de fonctions définies de A, partie non vide de E, à valeurs dans F.

- On dit que la suite converge simplement sur A si pour tout $x \in A$ la suite $(f_n(x))_{n\in\mathbb{N}}$ est convergente.
  Autrement dit, il existe une fonction f définie sur A telle que :
  $$\forall x \in A \quad f_n(x) \longrightarrow f(x)$$
- On dit que la série $\sum f_n$ converge simplement si pour tout $x \in A$ la série $\sum f_n(x)$ est convergente.

Définition I - 2 : Convergence uniforme

Soit $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite de fonctions définies de A, partie non vide de E, à valeurs dans F.

- On dit que la suite converge uniformément vers f sur A si, à partir d'un certain rang les fonctions $(f_n - f)$ sont bornées sur A et si $\|f_n - f\|_{A,\infty} \longrightarrow 0$.
- On dit que la série $\sum f_n$ converge uniformément vers f sur A si la suite des sommes partielles convergent uniformément vers f

Propriété I - 1 : Espaces des fonctions bornées

Si la suite $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge uniformément vers f sur A et si pour tout $n \in \mathbb{N}$ (ou à partir d'un certain rang) la fonction f_n est bornée sur A, alors f est bornée sur A.

Propriété I - 2 : implication

La convergence uniforme implique la convergence simple.

Propriété I - 3 :

La série $\sum f_n$ converge uniformément sur A si et seulement si elle converge simplement sur A et si la suite $\left(\sum_{n=N}^{+\infty} f_n\right)_{N\in\mathbb{N}}$ converge uniformément vers 0 sur A.

Définition I - 3 : Convergence normale

Soit $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite de fonctions définies sur une partie A de E à valeurs dans F. On dit que la série $\sum f_n$ converge normalement sur A si pour tout $n \in \mathbb{N}$ f_n est bornée sur A et si la série $\sum \|f_n\|_{A,\infty}$ converge.

Propriété I - 4 : pratique

Si $\sum \alpha_n$ est une série positive convergente telle $\|f_n\|_{A,\infty} \leqslant \alpha_n$, alors la série $\sum f_n$ converge normalement sur A.

Propriété I - 5 :

La convergence normale implique la convergence uniforme.
De plus si la série $\sum f_n$ converge normalement sur A alors

$$\left\|\sum_{n=0}^{+\infty} f_n\right\|_{A,\infty} \leqslant \sum_{n=0}^{+\infty} \|f_n\|_{A,\infty}$$

II Continuité et double limite

Théorème II - 1 : Continuité

Soit $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite de fonctions définies sur A. Soit $a \in A$. On suppose que, pour tout n, la fonction f_n est continue en a. Si la suite converge uniformément sur un voisinage de a vers f alors f est continue en a.

Corollaire II - 1 :

Toute suite de fonctions continues sur A convergeant uniformément sur A converge vers une fonction continue sur A.

Corollaire II - 2 : Espace des fonctions continues sur un compact

L'espace des fonctions continues sur un compact est un fermé de l'espace des fonctions bornées sur ce compact, muni de la norme de la convergence uniforme.

Théorème II - 2 : de la double limite

Soit $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite de fonctions de A dans F convergeant uniformément vers f sur A, et soit a un point adhérent à A.
Si, pour tout n, f_n admet une limite ℓ_n en a, alors la suite $(\ell_n)_{n\in\mathbb{N}}$ admet une limite ℓ et $f(x) \underset{x\to a}{\longrightarrow} \ell$.

Théorème II - 3 : Cas réel

On suppose que A est intervalle de $\mathbb{R}$ non majoré (resp non minoré). Soit $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite de fonctions de A dans F convergeant uniformément vers f sur A.
Si, pour tout n, f_n admet une limite ℓ_n en $+\infty$ (resp $-\infty$), alors la suite $(\ell_n)_{n\in\mathbb{N}}$ admet une limite ℓ et $f(x) \underset{x\to+\infty}{\longrightarrow} \ell$ (resp. $f(x) \underset{x\to-\infty}{\longrightarrow} \ell$).

Cas des séries

Théorème II - 4 : Continuité

Soit $\sum f_n$ une série de fonctions définies sur A. Soit $a \in A$. On suppose que, pour tout n, la fonction f_n est continue en a. Si la série converge uniformément sur un voisinage de a, alors $\sum_{n=0}^{+\infty} f_n$ est continue en a.

Théorème II - 5 : de la double limite pour les séries

Soit $\sum f_n$ une série de fonctions de A dans F convergeant uniformément sur A, et soit a un point adhérent à A.
Si, pour tout n, f_n admet une limite ℓ_n en a, alors la série $\sum \ell_n$ est convergente et $\sum_{n=0}^{+\infty} f_n(x) \underset{x\to a}{\longrightarrow} \sum_{n=0}^{+\infty} \ell_n$.

Théorème II - 6 : Cas réel

On suppose que A est intervalle de $\mathbb{R}$ non majoré (resp non minoré). Soit $\sum f_n$ une série de fonctions de A dans F convergeant uniformément sur A.
Si, pour tout n, f_n admet une limite ℓ_n en $+\infty$ (resp $-\infty$), alors la série $\sum \ell_n$ admet une limite ℓ et $\sum_{n=0}^{+\infty} f_n(x) \underset{x\to+\infty}{\longrightarrow} \sum_{n=0}^{+\infty} \ell_n$ (resp. $\sum_{n=0}^{+\infty} f_n(x) \underset{x\to-\infty}{\longrightarrow} \sum_{n=0}^{+\infty} \ell_n$).

III Intégration sur un segment

Théorème III - 1 :

Soit $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite de fonctions continues définies sur l'intervalle I de $\mathbb{R}$ et à valeurs dans F, a un point de I . On suppose que (f_n) converge uniformément sur tout segment de I vers une fonction f. Pour $n \in \mathbb{N}$ et $x \in I$ on pose

$$F_n(x) = \int_a^x f_n, \qquad \text{et} \qquad F(x) = \int_a^x f$$

Alors $(F_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge uniformément vers F sur tout segment de I.
En particulier : si (f_n) converge uniformément vers f sur $[a, b]$, alors

$$\int_a^b f_n \to \int_a^b f$$

Théorème III - 2 :

Soit $\sum f_n$ une série de fonctions définies sur I intervalle de $\mathbb{R}$. On suppose que cette série converge uniformément sur tout segment de I. On a alors, pour tout $(a, b) \in I^2$

$$\int_a^b \sum_{n=0}^{+\infty} f_n = \sum_{n=0}^{+\infty} \int_a^b f_n$$

IV Dérivation

Théorème IV - 1 : Dérivation

Soit $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite de fonctions de classe $\mathscr{C}^1$ sur un intervalle I de $\mathbb{R}$, à valeurs dans F.
Si $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge simplement sur I vers une fonction f,
si $(f_n')_{n\in\mathbb{N}}$ converge uniformément sur tout segment de I vers une fonction g,
alors (f_n) converge uniformément vers f sur tout segment de I, f est de classe $\mathscr{C}^1$ sur I et $f' = g$.

Théorème IV - 2 : Généralisation

Soit $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite de fonctions de classe $\mathscr{C}^m$ sur un intervalle I de $\mathbb{R}$, à valeurs dans F.
Si, pour tout $k \in [\![0, m-1]\!]$, $(f_n^{(k)})$ converge simplement sur I vers une fonction g_k,
si $(f_n^{(m)})$ converge uniformément sur tout segment de I vers une fonction g_m,
alors (f_n) converge uniformément vers f sur tout segment de I, f est de classe $\mathscr{C}^m$ sur I et, pour tout $k \in [\![0, m]\!]$ $f^{(k)} = g_k$.

Théorème IV - 3 : Cas des séries

Soit $\sum f_n$ une série de fonction de classe $\mathscr{C}^m$, $m \in \mathbb{N}^*$, sur un intervalle I de $\mathbb{R}$.
Si, pour tout $k \in [\![0, m-1]\!]$, la série $\sum f_n^{(k)}$ converge simplement sur I et
si $\sum f_n^{(m)}$ converge uniformément sur tout segment de I,
alors la série $\sum f_n$ converge uniformément sur tout segment de I, $\sum_{n=0}^{+\infty} f_n$ est de classe $\mathscr{C}^m$ sur I et, pour tout $k \in [\![0, m]\!]$ la dérivée $k$ième de la somme est $\sum_{n=0}^{+\infty} f_n^{(k)}$.

V Intégrales généralisées

1) Convergence dominée

Théorème V - 1 : de convergence dominée

Soit $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite de fonctions à valeurs réelles ou complexes continues par morceaux sur I.
Si $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge simplement sur I vers une fonction f continue par morceaux sur I
et s'il existe une fonction φ continue par morceaux, positive et intégrable sur I, telle que pour tout entier n, $|f_n| \leq \varphi$ (hypothèse de domination),
alors les fonctions f_n et f sont intégrables sur I et

$$\int_I f = \lim_{n\to+\infty} \int_I f_n$$

.

Théorème V - 2 :

Soit $(f_\lambda)_{\lambda\in J}$ une famille indexée sur un intervalle $J =]a, b[$, de fonctions à valeurs réelles ou complexes continues par morceaux sur I.
S'il existe f continue par morceaux sur I tel que, pour tout $x \in I$, $f(x) = \lim\limits_{\lambda\to b} f_\lambda(x)$
et s'il existe une fonction φ continue par morceaux, positive et intégrable sur I, telle que pour tout λ, $|f_\lambda| \leq \varphi$ (hypothèse de domination),
alors les fonctions f_λ et f sont intégrables sur I et

$$\int_I f = \lim_{\lambda\to b} \int_I f_\lambda$$

.

2) Intégration terme à terme

Théorème V - 3 :

Si (f_n) est une suite de fonctions continues par morceaux et intégrables sur I, à valeurs dans $\mathbb{R}^+$, telle que la série $\sum f_n$ converge simplement et que sa somme soit continue par morceaux sur I, alors, dans $[0, +\infty]$,

$$\int_I \Big(\sum_{n=0}^{+\infty} f_n(t)\Big)\ \mathrm{d}t = \sum_{n=0}^{+\infty} \int_I f_n(t)\ \mathrm{d}t$$

Théorème V - 4 :

Si (f_n) est une suite de fonctions continues par morceaux et intégrables sur I, à valeurs dans $\mathbb{K}$, telle que la série $\sum f_n$ converge simplement et que sa somme soit continue par morceaux sur I et telle que

$$\sum_{n=0}^{+\infty} \int_I |f_n(t)|\ \mathrm{d}t < +\infty,$$

alors $\sum\limits_{n=0}^{+\infty} f_n$ est intégrable sur I et

$$\int_I \sum_{n=0}^{+\infty} f_n(t)\,\mathrm{d}t = \sum_{n=0}^{+\infty} \int_I f_n(t)\ \mathrm{d}t.$$

VI Approximation uniforme

Théorème VI - 1 :

Toute fonction continue par morceaux sur un segment peut être uniformément approchée par des fonctions en escaliers.

Théorème VI - 2 : de Weierstrass

Toute fonction continue sur un segment y est limite uniforme de fonctions polynomiales