Réduction

MP Lycée Clemenceau

Table des matières

Dans tout le chapitre E est $\mathbb{K}$ un espace vectoriel.

I Sous espaces stables

Définition I - 1 : Sous-espaces stables

Soit $u \in \mathscr{L}(E)$, on considère F un sous espace vectoriel de E .
On dit que F est stable par u si

$$u(F) \subset F$$

Définition I - 2 : Endomorphisme induit

Soit $u \in \mathscr{L}(E)$, on considère F un sous espace stable par u.
On appelle endomorphisme de F induit par u l'endomorphisme v de F défini par

$$v : \begin{array}{ccc} F & \to & F \\ x & \mapsto & u(x) \end{array}$$

Proposition I - 1 :

Soient u et v deux endomorphismes de E. Si $u \circ v = v \circ u$ (les endomorphismes commutent) alors $\operatorname{Im}(u)$ et $\ker(u)$ sont stables par v.

Proposition I - 2 :

Soit E un $\mathbb{K}$ espace vectoriel de dimension finie. Soit F un sous espace vectoriel de E.
On considère une base de E, $(e_i)_{i\in[\![1,n]\!]}$ telle que $(e_i)_{i\in[\![1,p]\!]}$ soit une base de F ($\dim(F) = p$ et la base de E est une base adaptée à F).
Un endomorphisme u de E stabilise F si et seulement si sa matrice dans $(e_i)_{i\in[1,n]}$ est de la forme

$$\begin{pmatrix} A & B \\ 0 & C \end{pmatrix} \quad \text{avec } A \in \mathscr{M}_p(\mathbb{K}),\ C \in \mathscr{M}_{n-p}(\mathbb{K}) \text{ et } B \in \mathscr{M}_{p,n-p}(\mathbb{K})$$

Proposition I - 3 :

Soit E un $\mathbb{K}$ espace vectoriel de dimension finie. On considère une suite de sous espaces de E, $(E_i)_{i\in[\![1,r]\!]}$ telle que, pour tout $i \in [\![1,r]\!]$ $E_i \subset E_{i+1}$ et $E_r = E$. Soit $(e_i)_{i\in[\![1,n]\!]}$ une base de E adaptée à la famille $(E_i)_{i\in[\![1,r]\!]}$. Soit u un endomorphisme de E.
u stabilise tous les sous espaces de la famille $(E_i)_{i\in[\![1,r]\!]}$ si et seulement si la matrice de u dans la base $(e_i)_{i\in[\![1,n]\!]}$ est de la forme

$$\begin{pmatrix} A_1 & B_{12} & \cdots & \cdots & B_{1r} \\ 0 & A_2 & B_{23} & & \vdots \\ \vdots & 0 & \ddots & B_{ij} & \vdots \\ \vdots & & 0 & A_{r-1} & B_{r-1r} \\ 0 & \cdots & \cdots & 0 & A_r \end{pmatrix}$$

Proposition I - 4 :

Soit E un $\mathbb{K}$-espace vectoriel de dimension finie.
Soit $(E_i)_{i\in[\![1,r]\!]}$ une famille de sous espaces vectoriels de E telle que $E = \bigoplus_{i\in[\![1,r]\!]} E_i$. et $\dim(E_i) = p_i$
Soit $(e_i)_{i\in[\![1,n]\!]}$ une base de E adaptée à la famille $(E_i)_{i\in[\![1,r]\!]}$.
Un endomorphisme u de E stabilise tous les sous espaces de la famille $(E_i)_{i\in[\![1,r]\!]}$ si et seulement si sa matrice dans la base $(e_i)_{i\in[\![1,n]\!]}$ est de la forme :

$$\begin{pmatrix} A_1 & 0 & \cdots & \cdots & 0 \\ 0 & A_2 & 0 & & \vdots \\ \vdots & 0 & \ddots & 0 & \vdots \\ \vdots & & 0 & A_{r-1} & 0 \\ 0 & \cdots & \cdots & 0 & A_r \end{pmatrix}$$

avec, pour tout $i \in [\![1,r]\!]$ $A_i \in \mathscr{M}_{p_i}(\mathbb{K})$

II Eléments propres

1) Définitions et propriétés

Définition II - 1 : Valeur propre

Soit u un endomorphisme de E, on appelle valeur propre tout $\lambda \in \mathbb{K}$ tel qu'il existe un vecteur v **non nul** tel que $u(v) = \lambda v$. Un tel vecteur v est alors appelé vecteur propre associé à λ.

Proposition II - 1 : Caractérisation

Soit E un espace vectoriel de dimension finie. Soit u un endomorphisme de E.
λ est valeur propre de u si et seulement si $(u - \lambda Id_E)$ n'est pas inversible.

Définition II - 2 : Spectre

Soit E une espace vectoriel de dimension finie et u un endomorphisme de E.
L'ensemble des valeurs propres de u est appelé spectre de u et noté $Sp(u)$

Définition II - 3 : Sous-espace propre

On appelle sous espace propre de u associé à λ, avec λ valeur propre de u, le sous espace vectoriel

$$E_\lambda(u) = \ker(u - \lambda Id_E)$$

Il vérifie donc

$$E_\lambda(u) = \ker(u - \lambda Id_E) = \{x \in E \quad / \quad u(x) = \lambda . x\}$$

Proposition II - 2 : Endomorphismes commutants

Si deux endomorphismes u et v commutent alors les sous espaces propres de l'un sont stables par l'autre.

Exemple II - 1 :

Exercice 83 banque CCINP

Soit u et v deux endomorphismes d'un $\mathbb{R}$-espace vectoriel E.

1) Soit λ un réel non nul. Prouver que si λ est valeur propre de $u \circ v$, alors λ est valeur propre de $v \circ u$.

2) On considère, sur $E = \mathbb{R}[X]$ les endomorphismes u et v définis par $u : P \longmapsto \displaystyle\int_1^X P$ et $v : P \longmapsto P'$.
Déterminer Ker$(u \circ v)$ et Ker$(v \circ u)$. Le résultat de la question 1. reste-t-il vrai pour $\lambda = 0$?

3) Si E est de dimension finie, démontrer que le résultat de la première question reste vrai pour $\lambda = 0$.
Indication : penser à utiliser le déterminant.

Proposition II - 3 : Somme directe des sous-espaces propres

Soit $u \in \mathscr{L}(E)$, soit $(\lambda_i)_{i \in [\![1,p]\!]}$ une famille de valeurs propres de u deux à deux distinctes. La somme des sous espaces propres associés est directe.

Corollaire II - 1 : Familles de vecteurs propres

Soit $u \in \mathscr{L}(E)$, soit $(\lambda_i)_{i\in[\![1,p]\!]}$ une famille de valeurs propres de u deux à deux distinctes. Toute famille de vecteurs propres (non nuls) $(v_i)_{i\in[\![1,p]\!]}$ tel que, pour $i \in [\![1,p]\!]$, v_i est associé à λ_i, est alors une famille libre.

Corollaire II - 2 : Spectre fini

Si E est un espace vectoriel de dimension finie alors tout endomorphisme de E admet un spectre de cardinal fini. Plus exactement il admet au plus $\dim(E)$ valeurs propres.

2) Eléments propres de matrices carrées

Définition II - 4 :

Soit $M \in \mathscr{M}_n(\mathbb{K})$.

- Un élément X de $\mathscr{M}_{n,1}(\mathbb{K})$ est appelé vecteur propre de M, s'il existe $\lambda \in \mathbb{K}$ tel que $MX = \lambda X$.
- $\lambda \in \mathbb{K}$ est appelé valeur propre de M s'il existe $X \in \mathscr{M}_{n,1}(\mathbb{K})$, non nul, tel que $MX = \lambda X$.
- Soit λ une valeur propre de M, on appelle espace propre de M associé à λ l'ensemble des $X \in \mathscr{M}_{n,1}(\mathbb{K})$ tel que $MX = \lambda X$.
- On appelle spectre de M l'ensemble des valeurs propres de M.

Proposition II - 4 :

Deux matrices semblables ont même spectre.

Propriété II - 1 :

Si $\mathbb{K}$ est un sous-corps de $\mathbb{K}'$ et si $M \in \mathscr{M}_n(\mathbb{K})$, le spectre de M dans $\mathbb{K}$ est contenu dans le spectre de M dans $\mathbb{K}'$.

III Polynômes d'un endomorphisme

Définition III - 1 :

Soit u un endomorphisme de E, on définit alors l'application ϕ_u de $\mathbb{K}[X]$ dans $\mathscr{L}(E)$ par :

$$\text{pour } P = \sum_{k=0}^{n} a_k X^k, \qquad \phi_u(P) = P(u) = \sum_{k=0}^{n} a_k u^k$$

avec pour convention $u^0 = Id_E$

Proposition III - 1 :

Soit $u \in \mathscr{L}(E)$. L'application de $\mathbb{K}[X]$ dans $\mathscr{L}(E)$ qui à P associe $P(u)$ est un morphisme d'algèbre.
De plus pour $(P,Q) \in \mathbb{K}[X]^2$ on a $(PQ)(u) = P(u) \circ Q(u) = Q(u) \circ P(u)$.
L'image, qu'on note $\mathrm{Im}(\phi_u) = \mathbb{K}[u]$, est donc une sous algèbre commutative de $\mathscr{L}(E)$. (morphisme d'algèbre)

Définition III - 2 : Polynôme annulateur

Soit u un endomorphisme de E . On dit que P est un polynôme annulateur de u si $P(u) = 0$.
Le noyau de ϕ_u est alors appelé idéal annulateur de u.

Corollaire III - 1 : Stabilité

Soit $u \in \mathscr{L}(E)$, pour tout $P \in \mathbb{K}[X]$, $\mathrm{Im}(P(u))$ et $\ker(P(u))$ sont stables par u.

Définition III - 3 :

Soit A une matrice carrée d'ordre n, on définit l'application de $\mathbb{K}[X]$ dans $\mathscr{M}_n(\mathbb{K})$ par

$$\text{pour } P = \sum_{k=0}^{n} a_k X^k, \qquad \text{on associe } \; P(A) = \sum_{k=0}^{n} a_k A^k$$

avec pour convention $A^0 = I_n$

Proposition III - 2 : Morphisme d'algèbre

Soit $A \in \mathscr{M}_n(\mathbb{K})$. L'application de $\mathbb{K}[X]$ dans$\mathscr{M}_n(\mathbb{K})$ qui à P associe $P(A)$ est un morphisme d'algèbre.
De plus pour $(P,Q) \in \mathbb{K}[X]^2$ on a $(PQ)(A) = P(A).Q(A) = Q(A).P(A)$.
L'image de cette application est donc une sous algèbre commutative de $\mathscr{M}_n(\mathbb{K})$.

Définition III - 4 : Polynôme annulateur

Soit $A \in \mathscr{M}_n(\mathbb{K})$. On dit que P est un polynôme annulateur de A si $P(A) = 0$.
Le noyau de ϕ_A est alors appelé idéal annulateur de A.

Proposition III - 3 :

Soient A et B deux matrices carrées d'ordre n. Si A et B sont semblables alors, pour tout polynôme P, $P(A)$ et $P(B)$ sont semblables.

Proposition III - 4 :

Soit $u \in \mathscr{L}(E)$ et λ une valeur propre de u. Si x est un vecteur de l'espace propre associé à λ, alors pour tout polynôme P, $P(u)(x) = P(\lambda)x$.

Proposition III - 5 :

Soit $u \in \mathscr{L}(E)$ et λ une valeur propre de u. On a alors :

1) $\forall P \in \mathbb{K}[X], \quad P(\lambda)$ est une valeur propre de $P(u)$

2) En particulier pour tout $k \in \mathbb{N}$, λ^k est une valeur propre de u^k.

Corollaire III - 2 :

Soit $u \in \mathscr{L}(E)$ et $P \in \mathbb{K}[X]$ tel que $P(u) = 0$.
Alors les valeurs propres de u sont éléments de $\{\lambda \in \mathbb{K} \quad / \quad P(\lambda) = 0\}$

Exemple III - 1 :

Exercice 65 banque CCINP

Soit u un endomorphisme d'un espace vectoriel E sur le corps $\mathbb{K}$ ($= \mathbb{R}$ ou $\mathbb{C}$). On note $\mathbb{K}[X]$ l'ensemble des polynômes à coefficients dans $\mathbb{K}$.

1. Démontrer que : $\forall (P,Q) \in \mathbb{K}[X] \times \mathbb{K}[X],\ (PQ)(u) = P(u) \circ Q(u)$.
2. (a) Démontrer que : $\forall (P,Q) \in \mathbb{K}[X] \times \mathbb{K}[X],\ P(u) \circ Q(u) = Q(u) \circ P(u)$.
   (b) Démontrer que, pour tout $(P,Q) \in \mathbb{K}[X] \times \mathbb{K}[X]$: (P polynôme annulateur de u)$\Longrightarrow$ (PQ polynôme annulateur de u)
3. Soit $A = \begin{pmatrix} -1 & -2 \\ 1 & 2 \end{pmatrix}$.
   Écrire le polynôme caractéristique de A, puis en déduire que le polynôme $R = X^4 + 2X^3 + X^2 - 4X$ est un polynôme annulateur de A.

Exemple III - 2 :

Exercice 88 banque CCINP

1. Soit E un $\mathbb{K}$-espace vectoriel ($\mathbb{K} = \mathbb{R}$ ou $\mathbb{C}$).
   Soit $u \in \mathcal{L}(E)$. Soit $P \in \mathbb{K}[X]$.
   Prouver que si P annule u alors toute valeur propre de u est racine de P.
2. Soit $n \in \mathbb{N}$ tel que $n \geqslant 2$. On pose $E = \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$.
   Soit $A = (a_{i,j})_{\substack{1 \leqslant i \leqslant n \\ 1 \leqslant j \leqslant n}}$ la matrice de E définie par $a_{i,j} = \begin{cases} 0 \text{ si } i = j \\ 1 \text{ si } i \neq j \end{cases}$.
   Soit $u \in \mathcal{L}(E)$ défini par : $\forall\, M \in E$, $u(M) = M + \mathrm{tr}(M)A$.
   (a) Prouver que le polynôme $X^2 - 2X + 1$ est annulateur de u.
   (b) u est-il diagonalisable ?
   Justifier votre réponse en utilisant deux méthodes (l'une avec, l'autre sans l'aide de la question 1.).

Proposition III - 6 : Polynôme minimal

Soit $u \in \mathscr{L}(E)$, si $\ker(\phi_u)$ est non réduit à 0, alors il existe un unique polynôme unitaire noté π_u, ou μ_u, tel que $\ker(\phi_u)$ soit l'ensemble des multiples de π_u.
Ce polynôme est appelé polynôme minimal de u.

Proposition III - 7 : Polynôme minimal d'une matrice

Soit $A \in \mathscr{M}_n(\mathbb{K})$. $\ker(\phi_A)$ est non réduit à 0. Il existe un unique polynôme unitaire noté π_A, ou μ_A, tel que $\ker(\phi_A)$ soit l'ensemble des multiples de π_A.
Ce polynôme est appelé polynôme minimal de A.

Proposition III - 8 :

Soit $u \in \mathscr{L}(E)$, on a $\dim(\mathbb{K}[u]) = \deg(\pi_u)$.
De plus $\left(u^k\right)_{k \in [\![0, \deg(\pi_u)-1]\!]}$ est une base de $\mathbb{K}[u]$.

Théorème III - 1 : de décomposition des noyaux

Soit $u \in \mathscr{L}(E)$. Soient P et Q deux polynômes premiers entre eux.
On a

$$\ker\left((PQ)(u)\right) = \ker\left(P(u)\right) \oplus \ker(Q(u))$$

Théorème III - 2 :

Soit $(P_i)_{i \in [\![1,r]\!]}$ une famille de polynômes deux à deux premiers entre eux. Pour tout $u \in \mathscr{L}(E)$ on a

$$\ker\left(\left(\prod_{i=1}^{p} P_i\right)(u)\right) = \bigoplus_{i=1}^{p} \ker\left(P_i(u)\right)$$

Exemple III - 3 :

Exercice 62 banque CCINP

Soit E un espace vectoriel sur $\mathbb{R}$ ou $\mathbb{C}$.
Soit $f \in \mathcal{L}(E)$ tel que $f^2 - f - 2\mathrm{Id} = 0$.

1. Prouver que f est bijectif et exprimer f^{-1} en fonction de f.
2. Prouver que $E = \mathrm{Ker}(f + \mathrm{Id}) \oplus \mathrm{Ker}(f - 2\mathrm{Id})$:
   (a) en utilisant le lemme des noyaux.
   (b) sans utiliser le lemme des noyaux.
3. Dans cette question, on suppose que E est de dimension finie.
   Prouver que $\mathrm{Im}(f + \mathrm{Id}) = \mathrm{Ker}(f - 2\mathrm{Id})$.

Définition III - 5 : Endomorphisme nilpotent

Soit $u \in \mathscr{L}(E)$ (E de dimension finie). On dit que u est nilpotent s'il admet comme polynôme minimal un polynôme de la forme X^p.

IV Polynôme caractéristique

Définition IV - 1 : χ_u

Soit E un espace vectoriel de dimension finie égale à n. Soit u un endomorphisme de E.
L'application $\lambda \mapsto \det(\lambda Id_E - u)$ est une fonction polynômiale. On appelle polynôme caractéristique de u le polynôme associé à cette fonction. On le note χ_u.

Propriété IV - 1 : Coefficients de χ_u

Soit E un espace de dimension n, soit $u \in \mathscr{L}(E)$. Le polynôme caractéristique de u est un polynôme de degré n, unitaire dont le terme de degré $n-1$ est $-tr(u)$ et le coefficient constant est $(-1)^n \det(u)$

$$\chi_u(X) = X^n - tr(u) X^{n-1} + .. + (-1)^n \det(u)$$

Définition IV - 2 : χ_A

Soit $M \in \mathscr{M}_n(\mathbb{K})$, on appelle polynôme caractéristique de M le polynôme associé à la fonction polynômiale $\lambda \mapsto \det(\lambda I_n - M)$

Proposition IV - 1 :

Soit u un endomorphisme de E, espace vectoriel de dimension finie, $\lambda \in \mathbb{K}$ est valeur propre de u si et seulement si λ est une racine du polynôme caractéristique de u.
De même λ est valeur propre de $M \in \mathscr{M}_n(K)$ si et seulement si λ est une racine du polynôme caractéristique de M

Proposition IV - 2 :

Deux matrices semblables ont même polynôme caractéristique.

Proposition IV - 3 : Polynôme caractéristique d'une matrice triangulaire

Soit $T \in \mathscr{M}_n(\mathbb{K})$ une matrice triangulaire dont les coefficients diagonaux sont notés $(t_i)_{i \in [\![1,n]\!]}$. Son polynôme caractéristique est alors

$$\chi_T = \prod_{i=1}^{n}(X - t_i)$$

Définition IV - 3 : Ordre de multiplicité

Soit u un endomorphisme de E, soit λ une valeur propre de u. Si λ est racine d'ordre k du polynôme caractéristique on dit que k est l'ordre de multiplicité de la valeur propre λ.

Proposition IV - 4 :

Soit u un endomorphisme de E. Soit F un sous espace vectoriel de E. Si F est stable par u alors le polynôme caractéristique de l'endomorphisme de F induit par u divise le polynôme caractéristique de u.

Corollaire IV - 1 :

La dimension d'un sous espace propre est inférieur ou égale à l'ordre de multiplicité de la valeur propre associée.

Corollaire IV - 2 :

Si le polynôme caractéristique est scindé $\chi_u(X) = \prod\limits_{k=1}^{n}(X - \lambda_k)$ alors $\operatorname{tr}(u) = \sum\limits_{k=1}^{n}\lambda_k$ et $\det(u) = \prod\limits_{k=1}^{n}\lambda_k$

Théorème IV - 1 : de Cayley-Hamilton

Soit E un espace vectoriel de dimension finie. Pour tout $u \in \mathscr{L}(E)$ on a $\chi_u(u) = 0$.

Corollaire IV - 3 :

1) Le polynôme minimal divise le polynôme caractéristique

2) Les racines du polynôme minimal sont les valeurs propres.

Corollaire IV - 4 : Indice de nilpotence

Si u est un endomorphisme nilpotent alors son indice de nilpotence est majoré par la dimension de l'espace.

Proposition IV - 5 : Endomorphisme induit

Soit $u \in \mathscr{L}(E)$. Si F est un sous espace stable par u et v est l'endomorphisme induit par u sur f, alors π_v divise π_u.

V Réduction des endomorphismes et des matrices

1) Diagonalisabilité

Définition V - 1 : Endomorphisme diagonalisable

Un endomorphisme d'un espace vectoriel de dimension finie est diagonalisable s'il existe une base de E dans laquelle la matrice de cet endomorphisme est diagonale.

Propriété V - 1 : Condition nécessaire

Si un endomorphisme est diagonalisable alors son polynôme caractéristique est scindé.

Propriété V - 2 :

Un endomorphisme u de E est diagonalisable si l'espace E est la somme directe des sous-espaces propres $E_\lambda(u)$de u.

Inversement, si E est la somme directe de sous espaces stables E_j sur lesquels u induit une homothétie, alors u est diagonalisable.

Proposition V - 1 :

Un endomorphisme est diagonalisable si et seulement si il existe une base formée de vecteurs propres.

Proposition V - 2 :

Pour qu'un endomorphisme soit diagonalisable il faut et il suffit que la somme des dimensions des sous espaces propres soit égale à la dimension de E.

Lorsque le polynôme caractéristique est scindé, cela revient à dire que les dimensions des sous espaces propres soient égales aux ordres de multiplicité des valeurs propres.

Proposition V - 3 :

Un endomorphisme dont le polynôme caractéristique est scindé à racines simple est diagonalisable.

Les espaces propres sont tous de dimension 1.

Exemple V - 1 :

Exercice 70 banque CCINP

Soit $A = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix} \in \mathcal{M}_3(\mathbb{C})$.

1. Déterminer les valeurs propres et les vecteurs propres de A. A est-elle diagonalisable ?
2. Soit $(a, b, c) \in \mathbb{C}^3$ et $B = a\mathrm{I}_3 + bA + cA^2$, où I_3 désigne la matrice identité d'ordre 3.
   Déduire de la question **1.** les éléments propres de B.

Exemple V - 2 :
Exercice 73 banque CCINP
On pose $A = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 4 & -1 \end{pmatrix}$.

1. Déterminer les valeurs propres et les vecteurs propres de A.
2. Déterminer toutes les matrices qui commutent avec la matrice $\begin{pmatrix} 3 & 0 \\ 0 & -2 \end{pmatrix}$.
   En déduire que l'ensemble des matrices qui commutent avec A est $\mathrm{Vect}\left(\mathrm{I}_2, A\right)$.

Exemple V - 3 :
Exercice 67 banque CCINP
Soit la matrice $M = \begin{pmatrix} 0 & a & c \\ b & 0 & c \\ b & -a & 0 \end{pmatrix}$ où a, b, c sont des réels.
M est-elle diagonalisable dans $\mathcal{M}_3(\mathbb{R})$? M est-elle diagonalisable dans $\mathcal{M}_3(\mathbb{C})$?

Proposition V - 4 :
Pour qu'un endomorphisme soit diagonalisable, il faut et il suffit qu'il annule un polynôme scindé à racines simples.

Exemple V - 4 :
Exercice 88 banque CCINP

1. Soit E un $\mathbb{K}$-espace vectoriel ($\mathbb{K} = \mathbb{R}$ ou $\mathbb{C}$).
   Soit $u \in \mathcal{L}(E)$. Soit $P \in \mathbb{K}[X]$.
   Prouver que si P annule u alors toute valeur propre de u est racine de P.

2. Soit $n \in \mathbb{N}$ tel que $n \geqslant 2$. On pose $E = \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$.
   Soit $A = (a_{i,j})_{\substack{1 \leqslant i \leqslant n \\ 1 \leqslant j \leqslant n}}$ la matrice de E définie par $a_{i,j} = \left\{ \begin{array}{l} 0 \text{ si } i = j \\ 1 \text{ si } i \neq j \end{array} \right.$.
   Soit $u \in \mathcal{L}(E)$ défini par : $\forall\, M \in E,\ u(M) = M + \mathrm{tr}(M)A$.
   (a) Prouver que le polynôme $X^2 - 2X + 1$ est annulateur de u.
   (b) u est-il diagonalisable ?
   Justifier votre réponse en utilisant deux méthodes (l'une avec, l'autre sans l'aide de la question 1.).

Proposition V - 5 :
Pour qu'un endomorphisme u soit diagonalisable, il faut et il suffit qu'il annule **le** polynôme scindé à racines simples $\prod\limits_{\lambda \in Sp(u)} (X - \lambda)$.
Ce polynôme est alors le polynôme minimal de l'endomorphisme.

Proposition V - 6 :
Si u est diagonalisable alors pour tout sous espace F stable par u, l'endomorphisme de F induit est aussi diagonalisable.

Définition V - 2 : Matrice diagonalisable
Une matrice carrée A est diagonalisable si elle est semblable à une matrice diagonale.

Proposition V - 7 :
Une matrice est diagonalisable si et seulement si elle annule un polynôme scindé à racines simples.

Théorème V - 1 : spectral
Toute matrice symétrique réelle est diagonalisable à l'aide d'une matrice orthogonale.

Exemple V - 5 :
Exercice ex 63 banque CCINP
Soit un entier $n \geqslant 1$. On considère la matrice carrée d'ordre n à coefficients réels :

$$A_n = \begin{pmatrix} 2 & -1 & 0 & \cdots & 0 \\ -1 & 2 & -1 & \ddots & \vdots \\ 0 & -1 & \ddots & \ddots & 0 \\ \vdots & \ddots & \ddots & 2 & -1 \\ 0 & \cdots & 0 & -1 & 2 \end{pmatrix}$$

Pour $n \geqslant 1$, on désigne par D_n le déterminant de A_n.

1. Démontrer que $D_{n+2} = 2D_{n+1} - D_n$.
2. Déterminer D_n en fonction de n.
3. Justifier que la matrice A_n est diagonalisable. Le réel 0 est-il valeur propre de A_n ?

Exemple V - 6 :
Exercice 68 banque CCINP
Soit la matrice $A = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 1 \\ -1 & 1 & -1 \\ 1 & -1 & 1 \end{pmatrix}$.

1. Démontrer que A est diagonalisable de quatre manières :
   (a) sans calcul,
   (b) en calculant directement le déterminant $\det(\lambda \mathrm{I}_3 - A)$, où I_3 est la matrice identité d'ordre 3, et en déterminant les sous-espaces propres,
   (c) en utilisant le rang de la matrice,
   (d) en calculant A^2.
2. On suppose que A est la matrice d'un endomorphisme u d'un espace euclidien dans une base orthonormée.

   Trouver une base orthonormée dans laquelle la matrice de u est diagonale.

2) Trigonalisation

Définition V - 3 : Endomorphisme trigonalisable
Soit u une endomorphisme de E. On dit que u est trigonalisable s'il existe une base de E dans la quelle la matrice de u est triangulaire supérieure.

Définition V - 4 : Matrice trigonalisable

Une matrice carrée est trigonalisable si elle est semblable à une matrice triangulaire supérieure.

Théorème V - 2 :

Un endomorphisme d'un espace vectoriel de dimension finie est trigonalisable si et seulement si son polynôme caractéristique est scindé.

Proposition V - 8 :

Une matrice est trigonalisable si et seulement si son polynôme caractéristique est scindé.

Corollaire V - 1 :

Un endomorphisme est trigonalisable si et seulement s'il annule un polynôme scindé, ou encore si et seulement si son polynôme minimal est scindé.

Corollaire V - 2 :

Une matrice est trigonalisable si et seulement si elle annule un polynôme scindé, ou encore si et seulement si son polynôme minimal est scindé.

Proposition V - 9 : Cas des endomorphismes nilpotents

Tout endomorphisme nilpotent d'un espace vectoriel de dimension finie est trigonalisable.
Plus exactement u est nilpotent si et seulement si il est trigonalisable avec pour seule valeurs propres 0.

Définition V - 5 : Sous-espaces caractéristiques

Soit $u \in \mathscr{L}(E)$. On suppose que χ_u est scindé et s'écrit :

$$\chi_u = \prod_{i=1}^{p} (X - \lambda_i)^{m_i}$$

où les m_i sont deux à deux distincts.
On appelle sous-espace caractéristique de u les sous-espaces vectoriels de E $\ker\left((u - \lambda_i Id_E)^{m_i}\right)$

Proposition V - 10 :

Soit $u \in \mathscr{L}(E)$ dont le polynôme caractéristique est scindé.
E est la somme directe des sous-espaces caractéristiques de u.

Proposition V - 11 :

Matriciellement : Soit $A \in \mathscr{M}_n(\mathbb{K})$ dont le polynôme caractéristique est de la forme $\chi_A = \prod_{i=1}^{p} (X - \lambda_i)^{m_i}$ alors A est semblable à une matrice de la forme

$$\begin{pmatrix} \lambda_1 I_{m_1} + N_1 & 0 & \cdots & \cdots & 0 \\ 0 & \lambda_2 I_{m_2} + N_2 & 0 & & \vdots \\ \vdots & 0 & \ddots & 0 & \vdots \\ \vdots & & 0 & \lambda_{p-1} I_{m_{p-1}} + N_{p-1} & 0 \\ 0 & \cdots & \cdots & 0 & \lambda_p I_{m_p} + N_p \end{pmatrix}$$

où les matrices N_i sont des matrices triangulaires supérieures de diagonale nulle.