Fonctions à valeurs vectorielles

MP Lycée Clemenceau

Table des matières

Les fonctions étudiées dans ce chapitre sont définies sur un intervalle I de $\mathbb{R}$ et à valeurs dans un espace vectoriel E de dimension finie sur $\mathbb{R}$ ou $\mathbb{C}$

I Dérivation des fonctions à valeurs vectorielles

1) Dérivation en un point

Définition I - 1 : Dérivabilité d'une fonction à valeurs vectorielles. ***Cauchy (1821)***

Soit I un intervalle de $\mathbb{R}$ et E un espace vectoriel normé.
On dit que $f : I \to E$ est dérivable en $a \in I$ si l'application définie sur $I \setminus \{a\}$ par

$$x \mapsto \frac{1}{x-a}\left(f(x) - f(a)\right)$$

admet une limite (finie) en a.
Dans ce cas, cette limite s'appelle dérivée de f en a et on la note $f'(a)$

Propriété I - 1 : Définition équivalente. ***Weierstrass (1861)***

Soit $f : I \to E$ une fonction vectorielle et $a \in I$.
f est dérivable en a si et seulement si f admet un développement limité d'ordre 1 au voisinage de a.
C'est à dire

$$\exists V \in \mathscr{V}(a) \;/\; \exists \ell \in E \text{ tel que } \forall x \in V \quad f(x) = f(a) + (x-a)\ell + \underset{x \to a}{o}(x-a)$$

On pose alors $f'(a) = \ell$.

Définition I - 2 : Dérivées à gauche, à droite

On dit que $f : I \to E$ est dérivable à gauche (resp. à droite) en $a \in I$ si l'intervalle $I \cap]-\infty, a]$ (resp. $I \cap [a, +\infty[$) n'est pas réduit à $\{a\}$ et si la restriction de f à cet intervalle est dérivable en a.
Si cette dérivée existe, elle appelée dérivée à gauche (resp à droite) en a et on la note $f'_g(a)$ (resp. $f'_d(a)$)

Propriété I - 2 :

La dérivabilité de l'application entraine sa continuité.

Définition I - 3 : Fonction dérivée

On dit que $f : I \to E$ est dérivable (resp. à gauche, resp. à droite) (sur I) si f est dérivable en tout point x de I.
On définit alors l'application dérivée $f' : I \to F$ qui à x associe $f'(x)$
On note aussi cette application Df ou encore $\dfrac{df}{dx}$

Définition I - 4 : Fonction de classe $\mathscr{C}^1$

Une application de I dans E est dite **de classe** $\mathscr{C}^1$ si elle est dérivable sur I et si sa dérivée est continue.

Proposition I - 1 :

L'ensemble des applications dérivables (resp. de classe $\mathscr{C}^1$) est un espace vectoriel, sous espace de l'ensemble des applications continues.
De plus l'application D, qui à une fonction associe sa fonction dérivée, est linéaire.

Proposition I - 2 : Composition

Soit E et F deux $\mathbb{K}$-espaces vectoriels de dimensions finies. Soit $u \in \mathscr{L}(E,F)$ et soit f une application de I dans E. Si f est dérivable alors $u \circ f$ est aussi dérivable et

$$(u \circ f)'(a) = u\left(f'(a)\right)$$

Proposition I - 3 :

Soit B une application bilinéaire de $E \times F$ dans G. On considère $f : I \to E$ et $g : I \to F$.
On définit alors l'application $B(f,g)$ de I dans G par, pour tout $x \in I$, $B(f,g)(x) = B(f(x), g(x))$.
Si f et g sont dérivables alors $B(f,g)$ est dérivable et on a :

$$\forall a \in I \quad (B(f,g))'(a) = B\left(f'(a), g(a)\right) + B\left(f(a), g'(a)\right)$$

Proposition I - 4 :

Soit $(f_i)_{i\in[\![1,p]\!]}$ une famille de fonctions vectorielles définies sur I intervalle de $\mathbb{R}$, à valeurs respectives dans E_i espace vectoriel de dimension finie.
Soit u une application p linéaire de $E_1 \times \cdots E_p$ dans F, espace vectoriel de dimension finie.
Si, pour tout $i \in [\![1,p]\!]$, f_i est dérivable alors la fonction h définie par :

$$\forall t \in I \quad h(t) = u\left(f_1(t), \cdots, f_p(t)\right)$$

est dérivable et sa dérivée est définie par, pour $t \in I$:

$$\begin{aligned} h'(t) =& u\left(f_1'(t), f_2(t), \cdots, f_p(t)\right) \\ &+ \sum_{i=2}^{p-1} u\left(f_1(t), \cdots, f_{i-1}(t), f_i'(t), f_{i+1}, \cdots, f_p(t)\right) \\ &+ u\left(f_1(t), \cdots, f_{p-1}(t), f_p'(t)\right) \end{aligned}$$

Proposition I - 5 : Caractérisation de la dérivabilité de f à l'aide d'une base de E.

Une application de I dans E est dérivable si et seulement si toutes les fonctions coordonnées de f dans une base de E sont dérivables.
De plus, si $\mathscr{B} = (e_i)_{i\in[\![1,n]\!]}$ est une base de E,

$$\text{si pour tout } x \in I\ f(x) = \sum_{i=1}^{n} f_i(x)e_i \text{ alors pour tout } x \in I\ f' = \sum_{i=1}^{n} f_i'(x)e_i$$

Corollaire I - 1 : Caractérisation des applications constantes

Une fonction dérivable sur I est constante si et seulement si sa fonction dérivée est nulle sur I.

Proposition I - 6 : Composée

Soit φ une fonction d'intervalle I de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$ et f une fonction de J intervalle de $\mathbb{R}$ dans E, composables ($\varphi(I) \subset J$). Si f et φ sont de classe $\mathscr{C}^1$ alors $f\circ\varphi$ est de classe $\mathscr{C}^1$ sur I et de plus

$$(f\circ\varphi)' = \varphi'.f'\circ\varphi$$

2) Applications de classe $\mathscr{C}^k$

Définition I - 5 : Fonction de classe $\mathscr{C}^k$

Soit $k \in \mathbb{N}^*$. Soit f une application de I dans E. On dit que f est de classe $\mathscr{C}^k$ si elle est dérivable et sa dérivée est de classe $\mathscr{C}^{k-1}$.
Une application est dite de classe $\mathscr{C}^\infty$ si elle est de classe $\mathscr{C}^k$ pour tout $k \in \mathbb{N}$.
On note les dérivées successives

$$f^{(k)} = D^k f = \frac{d^k f}{dx^k}$$

Proposition I - 7 :

L'ensemble des applications de classe $\mathscr{C}^k$ sur I est un $\mathbb{K}$-espace vectoriel, sous espace vectoriel de l'ensemble des applications continues.

Proposition I - 8 :

Lorsque $F = \mathbb{R}$ ou $\mathbb{C}$, cet espace vectoriel est aussi une $\mathbb{K}$-algèbre.

Proposition I - 9 : Formule de Leibniz

Soit $n \in \mathbb{N}^*$. Soient f et g deux fonctions de classe $\mathscr{C}^n$ sur I à valeurs dans $\mathbb{K}$. La fonction fg est alors aussi de classe $\mathscr{C}^n$ sur I et on a

$$(f.g)^{(n)} = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} f^{(k)} g^{(n-k)}$$

Plus généralement : si $\mathcal{B}$ est une application bilinéaire de $E \times F$ dans G, pour $f \in \mathscr{C}^n(I, E)$ et $g \in \mathscr{C}^n(I, F)$, la fonction $h : x \mapsto \mathcal{B}(f(x), g(x))$ est de classe $\mathscr{C}^n$ sur I et on a

$$h^{(n)} = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} \mathcal{B}\left(f^{(k)}, g^{(n-k)}\right)$$

II Intégration sur un segment

1) Intégrale d'une fonction en escalier

Définition II - 1 : Fonctions en escaliers

Soit E un espace vectoriel de dimension finie, f une fonction d'un segment $[a, b]$ de $\mathbb{R}$ à valeurs dans E.

On dit que f est une fonction en escaliers s'il existe une subdivision $(a_i)_{i \in [\![0,p]\!]}$ de $[a, b]$ et une famille $(v_i)_{i \in [\![0,p-1]\!]}$ de vecteurs de E, tels que :

$$\forall i \in [\![0, p-1]\!], \; \forall x \in]a_i, a_{i+1}[\quad f(x) = v_i$$

Propriété II - 1 : Structure

L'ensemble des fonctions définies sur $[a, b]$ à valeurs dans E, muni des lois usuelles, est un $\mathbb{K}$-espace vectoriel.

Propriété II - 2 : Intégrale d'une fonctions en escaliers

Soit f une fonction en escalier, définie sur $[a, b]$ à valeurs dans E, espace vectoriel normé de dimension finie. Soit $\{x_0, x_1, .., x_n\}$ une subidivision de $[a, b]$ associée à f , on définit le vecteur $I(f)$ défini par

$$I(f) = \sum_{i=1}^{n} (x_i - x_{i-1}) . a_i$$

où $a_i = f(x)$, pour tout $x \in]x_{i-1}, x_i[$.

Ce vecteur est indépendant de la subdivision et est appelé intégrale de f et on le note

$$\int_{[a,b]} f$$

Proposition II - 1 :

L'application, définie sur l'ensemble des fonctions en escaliers, qui à f associe son intégrale est linéaire.

Proposition II - 2 : Relation de Chasles

Additivité par rapport au segment d'intégration : pour $a < c < b$.
Soit f une fonction en escaliers sur $[a, b]$.

$$\int_{[a,b]} f = \int_{[a,c]} f + \int_{[c,b]} f$$

Proposition II - 3 :

Pour f une fonction en escalier et $(e_i)_{i\in[\![1,n]\!]}$ une base de E

$$\int_{[a,b]} f = \int_{[a,b]} \left(\sum_{i=1}^{n} f_i e_i\right) = \sum_{i=1}^{n} \left(\int_{[a,b]} f_i\right) .e_i$$

Proposition II - 4 :

Soit L une application linéaire de E vers F, soit f une fonction en escalier de I dans E.
$L \circ f$ est alors une fonction en escaliers de I vers F et on a de plus

$$\int_{[a,b]} L \circ f = L\left(\int_{[a,b]} f\right)$$

Proposition II - 5 :

Pour toute fonction en escaliers définie sur $[a, b]$ à valeurs dans E, et pour toute norme définie sur E

$$\left\|\int_{[a,b]} f\right\| \leq \int_{[a,b]} \|f\|$$

2) Intégrale d'une fonction continue par morceaux

Définition II - 2 :

Soit f une fonction continue par morceaux, alors d'après le théorème d'approximation uniforme on peut définit une suite de fonctions en escalier $(\varphi_n)_{n\in\mathbb{N}}$ vérifiant : $\|f - \varphi_n\| < \varepsilon(n)$ où ε tend vers 0 lorsque n tend vers l'infini, on définit alors l'intégrale de f par

$$\int_{[a,b]} f = \lim_{n\to\infty} \int_{[a,b]} \varphi_n$$

Propriété II - 3 : Caractérisation par les coordonnées

Soit f une fonction définie et continue par morceaux sur un segment I de $\mathbb{R}$ et à valeurs dans E un espace vectoriel de dimension finie. Soit $\mathscr{B} = (e_i)_{i\in[\![1,n]\!]}$ une base de E. On note $(e_i^*)_{i\in[\![1,n]\!]}$ les formes coordonnées relativement à $\mathscr{B}$.
On définit alors l'intégrale de f sur I par :

$$\int_I f = \sum_{i=1}^{n} \left(\int_I (e_i^* \circ f) \right) e_i$$

Propriété II - 4 : Linérité

L'application de l'espace des fonctions continues par morceaux dans $\mathbb{K}$, qui à f associe son intégrale est linéaire

Proposition II - 6 :

Pour toute fonction continue par morceaux sur $[a, b]$ à valeurs dans E, et pour toute norme définie sur E :

$$\left\| \int_{[a,b]} f \right\| \leq \int_{[a,b]} \|f\|$$

Proposition II - 7 :

Soit L une application linéaire de E vers F, soit f une fonction continue par morceaux de $[a, b]$ dans E.
$u \circ f$ est alors une fonction continue par morceaux de $[a, b]$ vers F et on a de plus

$$\int_{[a,b]} u \circ f = u \left(\int_{[a,b]} f \right)$$

Proposition II - 8 : Additivité par rapport au segment d'intégration

Soit f une application continue par morceaux sur I segment de $\mathbb{R}$. Soit $(a, b, c) \in I^3$, tel que $a < c < b$. On a :

$$\int_{[a,b]} f = \int_{[a,c]} f + \int_{[c,b]} f$$

3) Sommes de Riemann

Définition II - 3 : Subdivision régulière

Soit $(a, b) \in \mathbb{R}^2$ tel que $a < b$. On appelle subdivision régulière du segment $[a, b]$ la subdivision $(a_i)_{i\in[\![0,n]\!]}$ définie par

$$\forall i \in [\![0, n]\!] \qquad a_i = a + k\frac{b-a}{n}$$

Définition II - 4 : Sommes de Riemann

Soit f une fonction continue sur le segment $[a, b]$ à valeurs dans E. On appelle somme de Riemann de f associée à la subdivision régulière $(a_i)_{i\in[\![0,n]\!]}$ tout vecteur de la forme :

$$S_n = \frac{b-a}{n}\sum_{k=1}^{n} f(c_k) \qquad \text{où pour tout} k \in [\![1, n]\!] \;\; c_k \in [a_{k-1}, a_k]$$

Proposition II - 9 : Convergence

Si $f \in \mathscr{C}^0([a, b], E)$ alors la suite $(S_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ converge vers $\displaystyle\int_{[a,b]} f$

4) Dérivation et intégration

a) Primitives et intégrales

Définition II - 5 : Primitive

Soit f une fonction continue sur un intervalle I dans E, on appelle primitive de f, toute fonction F de classe $\mathscr{C}^1$ sur I dans E, telle que $F' = f$

Théorème II - 1 :

Deux primitives d'une même application continue différent d'une constante.

Théorème II - 2 : fondamental

Soit f une fonction continue de I dans E et a un point de I, alors

— la fonction F de I dans E définie par

$$F(x) = \int_a^x f(t)\,dt$$

est de classe $\mathscr{C}^1$ sur I

— F est une primitive de f sur I

— C'est l'unique primitive de f sur I qui s'annule en a

Proposition II - 10 : Intégration par parties

Soient f et g deux fonctions de classe $\mathscr{C}^1$ sur $[a, b]$ à valeurs dans $\mathbb{K}$. On a

$$\int_a^b f'g = [fg]_a^b - \int_a^b fg'$$

Proposition II - 11 : Changement de variables

Soit f une fonction continue sur $[A, B]$, soit φ une fonction de classe $\mathscr{C}^1$ sur $[\alpha, \beta]$ telle que $\varphi([\alpha, \beta]) \subset [A, B]$, alors on a

$$\int_{\varphi(\alpha)}^{\varphi(\beta)} f(t).dt = \int_{\alpha}^{\beta} (f \circ \varphi)(x).\varphi'(x).dx$$

Si de plus φ est bijective et $a = \varphi(\alpha)$ et $b = \varphi(\beta)$

$$\int_a^b f(t).dt = \int_{\varphi^{-1}(a)}^{\varphi^{-1}(b)} (f \circ \varphi)(x).\varphi'(x).dx$$

b) Etude globale des fonctions de classe $\mathscr{C}^1$

Proposition II - 12 : Inégalité des acroissements finis

Pour une application continue sur $[a, b]$ et de classe $\mathscr{C}^1$ sur $]a, b[$ Si pour tout $t \in]a, b[$ $\|f'(t)\| \leq k$ alors

$$\|f(b) - f(a)\| \leq k(b - a)$$

Proposition II - 13 :

Si f est continue sur $[a, b]$ *de* classe $\mathscr{C}^1$ sur $]a, b[$ et si f' a une limite (finie) en a alors f est de classe $\mathscr{C}^1$ sur $[a, b[$

Corollaire II - 1 : Extension aux fonctions de classe $\mathscr{C}^k$

Si f est continue et de classe $\mathscr{C}^k$ sur l'ouvert, et si pour tout $j \in [\![1, k]\!]$ $D^j f$ admet une limite en a alors f est de classe $\mathscr{C}^k$ sur le fermé.

c) Formules de Taylor

Proposition II - 14 : Reste intégral

Soit f de classe $\mathscr{C}^n$ et de classe $\mathscr{C}^{n+1}$ par morceaux sur I

$$\forall x \in I,\ f(x) = \sum_{k=0}^{n} \frac{(x-a)^k}{k!} f^{(k)}(a) + \int_a^x \frac{(x-t)^n}{n!} f^{(n+1)}(t)\,dt$$

Corollaire II - 2 : Inégalité de Taylor Lagrange

Soit f de classe $\mathscr{C}^n$ et de classe $\mathscr{C}^{n+1}$ par morceaux sur I à valeurs dans E

$$\forall x \in I,\ \left\| f(x) - \sum_{k=0}^{n} \frac{(x-a)^k}{k!} f^{(k)}(a) \right\| \leq \frac{|x-a|^{n+1}}{(n+1)!} \sup_{[a,x]} \left(\left\| f^{(n+1)} \right\| \right)$$

Corollaire II - 3 : Développement limité d'une primitive d'une application continue.

Si on a, au voisinage de x_0,

$$f(x) = a_0 + a_1(x - x_0) + .. + a_n(x - x_0)^n + o((x - x_0)^n)$$

alors toute primitive F de f admet un développement limité d'ordre $n + 1$...

Corollaire II - 4 :

Soit f une fonction de classe $\mathscr{C}^1$. Si la dérivée admet un développement limité d'ordre n alors f admet un développement limité d'ordre $n + 1$.

Corollaire II - 5 : Taylor Young pour des fonctions $\mathscr{C}^n$

Soit f une fonction de classe $\mathscr{C}^n$ et $a \in I$. Au voisinage de a :

$$f(x) = \sum_{k=0}^{n} \frac{(x-a)^k}{k!} f^{(k)}(a) + o((x-a)^n)$$

III Fonctions convexes

1) Définition et caractérisation

Définition III - 1 : Fonction convexe

Soit I un intervalle de $\mathbb{R}$. Une fonction f est convexe sur l'intervalle I si pour tout (x, y) de I^2 et tout λ de $[0, 1]$:

$$f((1 - \lambda)x + \lambda y) \leqslant (1 - \lambda)f(x) + \lambda f(y)$$

Définition III - 2 : Epigraphe

Soit f une fonction définie sur I intervalle de $\mathbb{R}$ à valeurs dans $\mathbb{R}$. On appelle épigraphe de f l'ensemble $A(f)$ des points de $I \times \mathbb{R}$ situés au-dessus du graphe de f. C'est à dire :

$$A(f) = \{(x, y) \in I \times \mathbb{R} \ / \ y \geqslant f(x)\}$$

Définition III - 3 : Fonction concave

Une fonction f est concave si $-f$ est convexe. C'est à dire si

$$\forall (x, y) \in I^2 \ \forall t \in [0, 1] \quad f((1 - t)x + ty) \geqslant (1 - t)f(x) + tf(y)$$

Proposition III - 1 : Inégalité de Jensen

Soit f une fonction convexe sur I intervalle de $\mathbb{R}$.
Pour toute famille $(x_i)_{i\in[\![1,n]\!]}$ d'éléments de I et toute famille $(\alpha_i)_{i\in[\![1,n]\!]}$ de réels strictement positifs telle que $\displaystyle\sum_{i=1}^{n}\alpha_i = 1$ on a

$$f\left(\sum_{i=1}^{n}\alpha_i x_i\right) \leqslant \sum_{i=1}^{n}\alpha_i f(x_i)$$

Johan Jensen, 1859-1925

Proposition III - 2 : Caractérisation par la fonction pente

Soit f une fonction définie sur I dans $\mathbb{R}$.
f est convexe si et seulement si

$$\forall (x,y,z)\in I^3 \ / \ x<y<z \quad , \quad \frac{f(x)-f(y)}{x-y} \leqslant \frac{f(x)-f(z)}{x-z} \leqslant \frac{f(y)-f(z)}{y-z}$$

2) Fonctions dérivables

Proposition III - 3 : f dérivable

Soit f une fonction dérivable sur I. f est convexe si et seulement si f' est croissante.

Proposition III - 4 : f deux fois dérivable

Soit f deux fois dérivable sur I. f est convexe si et seulement si f'' est positive.

Proposition III - 5 : Position de la tangente

Soit f une fonction dérivable sur I.
Si f est convexe alors sa courbe représentative est au dessus de ses tangentes.

3) Inégalités de convexité

Propriété III - 1 : Inégalités de convexité

1) Par concavité du logarithme et de la position de la courbe par rapport à la tangente en 1, on a $\forall x > 0 \ \ln(x) \leqslant x - 1$.
En appliquant cette inégalité à $\frac{1}{x}$ on obtient $\ln(x) \geqslant \frac{x-1}{x}$.
On obtient ainsi
$$\forall h > -1 \quad \frac{h}{1+h} \leqslant \ln(1+h) \leqslant h$$

2) Par convexité de la fonction exponentielle et la position de la tangente en 0 par rapport à la courbe on a
$$\forall x < 1, \quad 1 + x \leqslant e^x \leqslant \frac{1}{1-x}$$

3) Par concavité de la fonction sinus sur $\left[0, \frac{\pi}{2}\right]$ on a
$$\forall x \in \left[0, \frac{\pi}{2}\right] \quad \frac{2x}{\pi} \leqslant \sin(x) \leqslant x$$

Proposition III - 6 : Inégalité de Young

Soit $(p, q) \in \left(\mathbb{R}_+^*\right)^2$ tel que $\dfrac{1}{p} + \dfrac{1}{q} = 1$.
Pour tous réels a et b positifs on a
$$ab \leqslant \frac{a^p}{p} + \frac{b^q}{q}$$