

Topologie des espaces vectoriels normés

MP Lycée Clemenceau

Table des matières

I Normes	2
1) Définitions	2
2) Normes usuelles	4
3) Suites dans un espace vectoriel normé	5
4) Comparaison de normes	6
II Topologie	6
1) Généralités	6
2) Parties compacts	8
3) Cas de la dimension finie	9
4) Séries	9
III Etude locale	10
IV Etude globale	12
1) Généralités	12
2) Cas particulier : les applications linéaires	13
V Connexité	14
VI Dimension finie	15

I Normes

1) Définitions

Définition I - 1 : Norme

Soit E un \mathbb{K} -espace vectoriel, on appelle norme sur E toute application φ de E dans \mathbb{R}_+ , vérifiant :

- a) $\forall x \in E \quad \varphi(x) = 0 \Leftrightarrow x = 0$ (axiome de séparation)
- b) $\forall (x, \lambda) \in E \times K \quad \varphi(\lambda x) = |\lambda| \varphi(x)$ (axiome d'homogénéité)
- c) $\forall (x, y) \in E^2 \quad \varphi(x + y) \leq \varphi(x) + \varphi(y)$ (inégalité triangulaire)

Propriété I - 1 : Inégalité triangulaire :

Si φ est une norme sur E alors on a :

$$\forall (x, y) \in E^2 \quad |\varphi(x) - \varphi(y)| \leq \varphi(x - y)$$

et donc

$$\forall (x, y) \in E^2 \quad |\varphi(x) - \varphi(y)| \leq \varphi(x + y) \leq \varphi(x) + \varphi(y)$$

Notation :

On note usuellement une norme $\|\cdot\|$

Définition I - 2 : Espace vectoriel normé

Un espace vectoriel muni d'une norme est dit normé.

On note donc $(E, \|\cdot\|)$ pour désigné un espace vectoriel muni de la norme $\|\cdot\|$.

Définition I - 3 : Vecteur unitaire

Dans un espace vectoriel normé $(E, \|\cdot\|)$, on appelle vecteur unitaire tout vecteur u de E tel que $\|u\| = 1$

Définition I - 4 : Norme produit

Soit $((E_i, N_i))_{i \in \llbracket 1, r \rrbracket}$ une famille d'espaces vectoriels normés, définis sur un même corps.

On appelle norme produit sur $E_1 \times E_2 \times \cdots \times E_r$ l'application

$$N : E_1 \times E_2 \times \cdots \times E_r \longrightarrow \mathbb{R}^+ \\ (x_i)_{i \in \llbracket 1, r \rrbracket} \longmapsto \sup \{ N_i(x_i) / i \in \llbracket 1, r \rrbracket \}$$

Définition I - 5 : Distance sur un espace vectoriel

Soit E un \mathbb{K} espace vectoriel. On appelle distance sur E toute application de E^2 dans \mathbb{R}^+ vérifiant

$$\begin{aligned} \forall (x, y) \in E^2, \quad d(x, y) = 0 &\Leftrightarrow x = y \\ \forall (x, y) \in E^2, \quad d(x, y) &= d(y, x) \\ \forall (x, y, z) \in E^3, \quad d(x, z) &\leq d(x, y) + d(y, z) \end{aligned}$$

Définition I - 6 : Distance associée à un norme

Soit $(E, \|\cdot\|)$ un espace vectoriel normé, l'application d définie par

$$\begin{aligned} d : E^2 &\rightarrow \mathbb{R}^+ \\ (x, y) &\mapsto d(x, y) = \|x - y\| \end{aligned}$$

est une distance sur E , appelée distance associée à la norme $\|\cdot\|$

Définition I - 7 : Boules et sphère

Soit $(E, \|\cdot\|)$ un espace vectoriel normé, on appelle

- boule ouverte de centre $a \in E$ et de rayon $r \in \mathbb{R}_+^*$ l'ensemble

$$B(a, r) = \{x \in E \mid \|a - x\| < r\}$$

- boule fermée de centre $a \in E$ et de rayon $r \in \mathbb{R}^+$ l'ensemble

$$B_f(a, r) = \overline{B(a, r)} = \{x \in E \mid \|a - x\| \leq r\}$$

- sphère de centre $a \in E$ et de rayon $r \in \mathbb{R}^+$ l'ensemble

$$\mathcal{S}(a, r) = \{x \in E \mid \|x - a\| = r\}$$

Définition I - 8 : Segment

Soient x et y deux vecteurs distincts de E , espace vectoriel réel, on appelle segment $[x, y]$ l'ensemble

$$[x, y] = \{z \in E \mid \exists \lambda \in [0, 1], z = (1 - \lambda)x + \lambda y\}$$

Définition I - 9 : Partie convexe

Soit A une partie non vide de E .

On dit que A est une partie convexe de E si pour tout $(x, y) \in A^2$, le segment $[x, y]$ est inclus dans A .

Proposition I - 1 : Convexité

Une boule (ouverte ou fermée) d'un espace vectoriel normé E est convexe.

Définition I - 10 : Partie bornée

Une partie A de E est dite bornée si : $\exists M \in \mathbb{R}^{+*} \mid \forall x \in A \quad \|x\| \leq M$

Proposition I - 2 :

- Toute sous partie d'une partie bornée est bornée
- Toute réunion finie de parties bornées est une partie bornée.
- Toute intersection de parties bornées est une partie bornée.

Définition I - 11 : Application bornée

Une application f d'un ensemble X (non vide) à valeurs dans E est dite bornée si l'ensemble $f(X)$ est une partie bornée de E .

2) Normes usuelles

3) Suites dans un espace vectoriel normé

Définition I - 12 :

Soit $(E, \|\cdot\|)$ un espace vectoriel normé. On considère une suite d'éléments de E , $(x_n)_{n \in \mathbb{N}}$. On dit que cette suite est :

- bornée s'il existe $M \in \mathbb{R}^+$ tel que pour tout entier n

$$\|x_n\| \leq M$$

- convergente s'il existe $\ell \in E$ tel que

$$\forall \varepsilon > 0, \exists n_0 \in \mathbb{N} \text{ tel que } \forall n > n_0, \|\ell - x_n\| < \varepsilon$$

Ce qui revient à dire que la suite $(x_n)_{n \in \mathbb{N}}$ converge vers ℓ si et seulement si la suite réelle $(\|\ell - x_n\|)_{n \in \mathbb{N}}$ converge vers 0

- divergente si elle n'est pas convergente.

Proposition I - 3 :

- Si une suite converge, alors sa limite est unique
- Toute suite convergente est bornée.
- L'ensemble des suites convergentes est un espace vectoriel et l'application qui, à la suite, associe sa limite est linéaire.

Proposition I - 4 : Suite à valeurs dans un produit fini d'espaces vectoriels normés.

Soit $(E_k, \|\cdot\|_k)_{k \in \llbracket 1, p \rrbracket}$ une famille finie d'espaces vectoriels normés. On considère une suite $U = (u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ d'éléments de $E = E_1 \times \dots \times E_p$.

Pour $n \in \mathbb{N}$ on pose $u_n = (x_{1,n}, \dots, x_{p,n})$. On a alors, la suite U est une suite convergente de E si et seulement si pour tout $i \in \llbracket 1, p \rrbracket$, la suite $(x_{i,n})_{n \in \mathbb{N}}$ est convergente.

De plus, dans le cas de la convergence, on a $\lim_{n \rightarrow +\infty} u_n = \left(\lim_{n \rightarrow +\infty} x_{1,n}, \dots, \lim_{n \rightarrow +\infty} x_{p,n} \right)$.

Rappels

Définition I - 13 : Suites extraites

Soit $U = (u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ une suite d'éléments d'un espace vectoriel normé. Une suite $(v_n)_{n \in \mathbb{N}}$ est une suite extraite de U s'il existe une application φ de \mathbb{N} dans \mathbb{N} strictement croissante telle que pour tout $n \in \mathbb{N}$, $v_n = u_{\varphi(n)}$.

Définition I - 14 : Valeur d'adhérence

On appelle valeur d'adhérence d'une suite $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ tout élément $x \in E$ tel qu'il existe une suite extraite convergant vers cet élément.

Propriété I - 2 :

Une suite ayant au moins deux valeurs d'adhérence diverge.

4) Comparaison de normes

Proposition I - 5 :

Soit N et N' deux normes définies sur un même espace vectoriel.

Toute suite convergant au sens de N converge aussi au sens de N' si et seulement si il existe $\alpha \in \mathbb{R}_+^*$ tel que $N' \leq \alpha N$

Définition I - 15 : Normes équivalentes

Soient N_1 et N_2 deux normes définies sur un même espace vectoriel. On dit que ces normes sont équivalentes s'il existe un couple $(\alpha, \beta) \in \mathbb{R}^{+*2}$ tel que

$$\forall x \in E \quad \alpha N_1(x) \leq N_2(x) \leq \beta N_1(x)$$

Propriété I - 3 :

Si deux normes sont équivalentes alors toute suite bornée pour une norme est bornée pour l'autre.

Proposition I - 6 :

Deux normes sont équivalentes si et seulement si toute suite convergente pour l'une est convergente pour l'autre.

II Topologie

1) Généralités

Dans toute la suite de ce paragraphe $(E, \|\cdot\|)$ est un espace vectoriel normé dont la norme est fixée.

Définition II - 1 : Partie ouverte

On appelle partie ouverte, ou encore plus souvent ouvert de E , toute partie A de E qui est soit vide, soit non vide et telle que, pour tout $a \in A$, il existe $r \in \mathbb{R}_+^*$ tel que $B(a, r) \subset A$.

Exemple II - 1 :

Une boule ouverte est un ouvert.

Propriété II - 1 :

Un produit fini d'ouverts est un ouvert.

Définition II - 2 : Voisinage d'un point a

On appelle voisinage d'un élément $a \in E$ toute partie de E contenant une boule ouverte centrée en a . L'ensemble des voisinages de a est souvent noté $\mathcal{V}(a)$.

Définition II - 3 : Partie fermée

Une partie fermée, appelée encore fermé de E , est une partie de E dont le complémentaire est un ouvert de E

Propriété II - 2 : Fondamentale : Réunion et intersection d'ouverts et fermés

- i) La réunion quelconques d'ouverts est un ouvert
- ii) L'intersection quelconque de fermés est un fermé
- iii) L'intersection d'un nombre fini d'ouverts est un ouvert
- iv) L'union de deux fermés est un fermé

Définition II - 4 : Point adhérent à une partie

Soit A une partie non vide de E , un élément a de E est dit adhérent à A si pour tout $r \in \mathbb{R}_+^*$ on a $B(a, r) \cap A \neq \emptyset$.

L'ensemble des points d'adhérence de A est appelé adhérence de A et noté \bar{A} .

Proposition II - 1 : Caractérisation d'un fermé

Une partie non vide A est un fermé si et seulement si tout point adhérent de A est un point de A .

Proposition II - 2 : Caractérisation d'un point adhérent

Soit A une partie non vide de E . Un point x_0 de E est adhérent à A si et seulement si, il existe une suite d'éléments de A convergente vers x_0 .

Corollaire II - 1 : Caractérisation d'un fermé

A est un fermé si et seulement si toute suite d'éléments de A convergente, converge dans A .

Définition II - 5 : Partie dense

Une partie non vide A de E est dense dans E si $\bar{A} = E$.

Définition II - 6 : Point intérieur et intérieur d'une partie

Soit A une partie de E . Un élément a de E est appelé point intérieur de A s'il existe $r \in \mathbb{R}_+^*$ tel que $B(a, r) \subset A$.

L'ensemble des points intérieur de A est appelé intérieur de A et noté $\overset{\circ}{A}$.

Définition II - 7 : Frontière

Soit A une partie de E . On appelle frontière de A l'ensemble des points adhérents à A et à son complémentaire, ou encore $Fr(A) = \bar{A} \setminus \overset{\circ}{A}$.

Propriété II - 3 : Topologie et normes équivalentes

Si N et N' sont deux normes équivalentes de E alors les définitions topologiques selon les normes sont équivalentes.

Définition II - 8 : Topologie relative

Soit $(E, \|\cdot\|)$ un espace vectoriel normé et A une partie non vide de E .

— On appelle ouvert relatif de A toute partie U de A telle que

$$\forall b \in U \quad \exists r > 0, \forall a \in A, \|a - b\| < r \Rightarrow a \in U$$

— On appelle fermé relatif de A toute partie de A telle que $A \setminus B$ est un ouvert relatif de A .

— Soit $a \in A$, on dit que B , partie de A , est un voisinage relatif de a dans A si

$$\exists r > 0, \forall a \in A, \|a - b\| < r \Rightarrow a \in B$$

Propriété II - 4 :

Une partie U de A est un ouvert relatif si U est voisinage relatif de chacun de ses points.

Propriété II - 5 :

Soit $(E, \|\cdot\|)$ un espace vectoriel normé et A une partie non vide de E .

— U est un ouvert relatif de A si et seulement si il existe V un ouvert de E tel que $U = A \cap V$

— U est un fermé relatif de A si et seulement si il existe V un fermé de E tel que $U = A \cap V$

2) Parties compacts**Définition II - 9 : Séquentielle d'une partie compacte**

Soit $(E, \|\cdot\|)$ un espace vectoriel normé. Une partie non vide A est une partie compacte de E si toute suite d'éléments de A admet au moins une valeur d'adhérence dans A .

Propriété II - 6 :

Tout compact de E est une partie fermée et bornée.

Proposition II - 3 :

Toute sous partie fermée d'un compact est un compact.

Proposition II - 4 :

Un fermé relatif d'une partie compacte est compact.

Théorème II - 1 : Suite dans un compact

Une suite d'éléments d'un compact converge si et seulement si elle admet une unique valeur d'adhérence.

Proposition II - 5 : Produit de compacts

Soit $(E_k, \|\cdot\|_k)_{k \in [1, p]}$ une famille finie d'espaces vectoriels normés. Si $(C_k)_{k \in [1, p]}$ est une famille de parties compactes, avec, pour tout $k \in [1, p]$, $C_k \subset E_k$, alors $C_1 \times \dots \times C_p$ est une partie compacte de l'espace produit.

3) Cas de la dimension finie

Théorème II - 2 : Équivalence des normes

Si E est un espace vectoriel de dimension finie alors toutes normes sont équivalentes.

Proposition II - 6 : Compacts

Une partie d'un espace normé de dimension finie est compacte si et seulement si elle est fermée et bornée.

Corollaire II - 2 :

Une suite bornée d'un espace normé de dimension finie converge si et seulement si elle a une unique valeur d'adhérence.

Proposition II - 7 :

Un sous-espace de dimension finie d'un espace normé est fermé.

4) Séries

Définition II - 10 : Série absolument convergente

Soit $(E, \|\cdot\|)$ un espace vectoriel normé.

Soit $\sum x_n$ une série d'éléments de E . On dit que la série est absolument convergente si la série $\sum \|x_n\|$ est convergente.

Théorème II - 3 :

Une série absolument convergente d'éléments d'un espace vectoriel normé de dimension finie est convergente.

Propriété II - 7 :

L'application N de $\mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ dans \mathbb{R}^+ définie par

$$M = (m_{i,j})_{(i,j) \in \llbracket 1, n \rrbracket} \longmapsto \max_{i \in \llbracket 1, n \rrbracket} \sum_{j=1}^n |m_{i,j}|$$

est une norme sur $\mathcal{M}_n(\mathbb{K})$.

De plus celle-ci vérifie :

$$\forall (A, B) \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})^2 \quad N(AB) \leq N(A)N(B)$$

Proposition II - 8 : Exponentielle de matrice

Soit $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$, la série $\sum \frac{1}{n!} A^n$ est convergente.

Sa somme est appelée exponentielle de A et notée :

$$\exp(A) = e^A = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{1}{n!} A^n$$

III Etude locale

On considère deux espaces vectoriels normés $(E, \|\cdot\|)$ et (F, N) .

Définition III - 1 : Limite en un point

Soit A une partie non vide de E . Soient f une application définie sur A à valeurs dans F et a un point adhérent à A .

On dit que f admet une limite en a s'il existe $\ell \in F$ tel que, pour tout voisinage \mathcal{V} de ℓ il existe un voisinage \mathcal{U} de a tel que pour tout $x \in \mathcal{U} \cap A$, $f(x) \in \mathcal{V}$.

On peut aussi dire que l'image réciproque de tout voisinage de ℓ est un voisinage de a dans $A \cup \{a\}$ (c'est à dire un voisinage relatif à $A \cup \{a\}$ de a).

Cela peut encore s'écrire :

$$\forall \varepsilon > 0, \exists r > 0 \text{ tel que } \forall x \in A \quad \|x - a\| < r \Rightarrow N(f(x) - \ell) < \varepsilon$$

Définition III - 2 : Généralisation

1) Soit f une application définie sur E à valeurs dans F .

On dit que f admet une limite en l'infini s'il existe $\ell \in F$ tel que

$$\forall \varepsilon > 0, \exists R > 0 / \|x\| > R \Rightarrow N(f(x) - \ell) < \varepsilon$$

2) Soit f une application définie sur $[a_0, +\infty[$ (resp. $]-\infty, a]$) à valeurs dans F .

On dit que f admet une limite en $+\infty$ (resp. $-\infty$) s'il existe $\ell \in F$ tel que

$$\forall \varepsilon > 0, \exists R > 0 / x > R \text{ (resp. } x < R) \Rightarrow N(f(x) - \ell) < \varepsilon$$

3) Soient f une application définie sur $A \subset E$ à valeurs dans \mathbb{R} et a un point adhérent à A .

On dit que f admet $+\infty$ (resp. $-\infty$) comme limite en a si

$$\forall R \in \mathbb{R}, \exists r > 0 \text{ tel que } \forall x \in A \quad \|x - a\| < r \Rightarrow f(x) > R \text{ (resp. } f(x) < R)$$

Proposition III - 1 : Caractérisation séquentielle

Soient f une application de $A \subset E$ dans F et $a \in \bar{A}$.

f admet pour limite ℓ en a si et seulement si pour toute suite $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ d'éléments de A convergeant vers a , la suite $(f(u_n))_{n \in \mathbb{N}}$ converge vers ℓ .

Proposition III - 2 : Application dans un produit fini d'espaces vectoriels normés

Soit $((F_i, N_i))_{i \in [1, p]}$ une famille finie d'espaces vectoriels normés, on pose $F = F_1 \times \dots \times F_p$ muni de la norme produit. Soit f une application de $A \subset E$ dans F . On note $f = (f_i)_{i \in [1, p]}$, avec, pour $i \in [1, p]$ $f_i : A \rightarrow F_i$.

Soit $a \in \bar{A}$. f admet une limite en a si et seulement si pour tout $i \in [1, p]$, f_i admet une limite en a .

Proposition III - 3 : Opérations algébriques sur les limites.

Soient $(E, \|\cdot\|)$ et (F, N) deux espaces vectoriels normés, $A \subset E$.

Soit $a \in \overline{A}$. On considère f et g deux applications définies sur A admettant une limite en a . On note ℓ_1 et ℓ_2 les limites respectives.

On a alors :

- $f + g$ admet une limite en a qui est $\ell_1 + \ell_2$.
- pour $\lambda \in \mathbb{K}$, l'application λf admet une limite qui est $\lambda \ell_1$.
- si f et g sont à valeurs dans \mathbb{K} , l'application fg admet une limite qui est $\ell_1 \ell_2$.

On a donc : l'ensemble des applications de $A \subset E$ dans F admettant une limite en $a \in \overline{A}$ est un espace vectoriel. Si de plus $F = \mathbb{K}$ alors c'est une \mathbb{K} -algèbre.

Proposition III - 4 : Composées

Soient $(E, \|\cdot\|)$, (F, N) et (G, N_G) trois espaces vectoriels normés.

On considère les applications f de $A \subset E$ dans F et g de $B \subset F$ dans G , composables, c'est-à-dire $f(A) \subset B$.

Soit $a \in \overline{A}$. On suppose que f admet une limite ℓ en a .

On a alors que $\ell \in \overline{B}$.

Si de plus g admet une limite en ℓ alors l'application $g \circ f$ admet une limite en a et $\lim_{x \rightarrow a} g \circ f = \lim_{y \rightarrow \ell} g$.

Définition III - 3 : Continuité en $a \in A$

Soit f une application de $A \subset E$ dans F . Soit $a \in A$. Si f admet une limite en a alors celle-ci est $f(a)$ et on dit alors que f est continue en a .

Propriété III - 1 : Caractérisation séquentielle

Soient f une application de $A \subset E$ dans F et $a \in A$.

f est continue en a si et seulement si pour toute suite $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ d'éléments de A convergeant vers a , la suite $(f(u_n))_{n \in \mathbb{N}}$ converge vers $f(a)$.

Propriété III - 2 : Espace des applications continues en a .

L'ensemble des applications définies sur A continues en a est un \mathbb{K} -espace vectoriel.

Si l'espace d'arrivé est \mathbb{K} alors c'est une \mathbb{K} algèbre.

Propriété III - 3 : Composée

Soient deux applications f et g composables. Si f est continue en a et g est continue en $f(a)$ alors $g \circ f$ est continue en a .

IV Etude globale

1) Généralités

Proposition IV - 1 :

Soit A un ensemble non vide et $(F, \|\cdot\|)$ un espace vectoriel normé, l'ensemble des applications bornées de A dans F est un sous espace vectoriel de F^A et l'application $N_\infty : f \rightarrow \sup_A \|f\|$ est une norme sur $\mathcal{B}(A, F)$

Définition IV - 1 : Continuité sur A

On dit qu'une application définie sur A est continue si elle est continue en tout point de A .

Propriété IV - 1 : Espace des applications continues

L'ensemble des applications définies sur A continues est un \mathbb{K} -espace vectoriel.

Propriété IV - 2 : Composée

Soient deux applications $f : A \rightarrow F$ et $g : B \rightarrow G$ composables. Si f et g sont continue alors $g \circ f$ est continue sur A .

Proposition IV - 2 : Applications à valeurs dans \mathbb{K}

L'ensemble des fonctions continues à valeurs réelles ou complexes est une algèbre.

Proposition IV - 3 : Densité

Soient $f : B \subset E \rightarrow F$ et $g : B \subset E \rightarrow F$ deux applications continues. S'il existe $A \subset B$ tel que les deux applications sont identiques sur A et tel que A soit dense dans B , alors f et g sont identiques sur B .

Proposition IV - 4 : Ouvert et fermé

Soit f une application continue de E dans F . On a alors

- L'image réciproque d'un ouvert de F est un ouvert de E
- L'image réciproque d'un fermé de F est un fermé de E

Définition IV - 2 : Uniforme continuité

Soit f une application définie sur $A \subset E$ à valeurs dans F . On dit que f est uniformément continue sur A si

$$\forall \varepsilon > 0 \exists \delta > 0 \text{ tel que } \forall (x, y) \in A^2 \quad \|x - y\|_E < \delta \Rightarrow \|f(x) - f(y)\|_F < \varepsilon$$

Définition IV - 3 : Applications lipschitzienne

Soit $f : A \subset E \rightarrow F$ et $k \in \mathbb{R}_+^*$. On dit que f est k -lipschitzienne si

$$\forall (x, y) \in A^2 \quad \|f(x) - f(y)\|_F \leq k \|x - y\|_E$$

Propriété IV - 3 : Uniforme continuité et application lipschitzienne

Les applications lipschitziennes sont uniformément continues.

Théorème IV - 1 : de Heine

Les applications continues sur un compact sont uniformément continues

Théorème IV - 2 :

Soit f une application continue de $A \subset E$ dans F . Pour tout compact inclus dans A , l'image de ce compact est un compact de F .

Proposition IV - 5 : Application : existence des extréma pour une fonction à valeurs réelles.

Si f est une fonction continue définie sur un compact K de E à valeurs réelles, alors $f(K)$ est un compact de la droite réelle. C'est à dire que f est bornée et atteint ses bornes.

2) Cas particulier : les applications linéaires**Théorème IV - 3 :**

Soit $f \in \mathcal{L}(E, F)$.

On a équivalence entre les assertions suivantes :

- f est continue
- f est continue en 0
- f est bornée sur $\overline{B}(0, 1)$
- $\exists k \in \mathbb{R}$ tel que, pour tout $x \in E$, $\|f(x)\| \leq k \cdot \|x\|$
- f est lipschitzienne.
- f est uniformément continue

Notation :

L'ensemble des applications linéaires continues de E dans F est noté $\mathcal{L}_c(E, F)$

Proposition IV - 6 :

Soit E et F deux espaces vectoriels normés. Soit $f \in \mathcal{L}_c(E, F)$. On pose

$$\|f\| = \inf \{C \in \mathbb{R}_+ / \forall x \in E \quad \|f(x)\|_F \leq C \|x\|_E\}$$

On a alors

$$\|f\| = \sup_{\|x\|_E \neq 0} \frac{\|f(x)\|_F}{\|x\|_E} = \sup_{\|x\|_E = 1} \|f(x)\|_F = \sup_{\|x\|_E \leq 1} \frac{\|f(x)\|_F}{\|x\|_E}$$

De plus

$$\forall x \in E \quad \|f(x)\|_F \leq \|f\| \|x\|_E$$

Théorème IV - 4 : Norme subordonnée

Soit E et F deux espaces vectoriels normés.

L'application définie sur $\mathcal{L}_c(E, F)$ qui, à f , associe $\|f\|$ est une norme sur $\mathcal{L}_c(E, F)$.

Cette norme est sous multiplicative : pour E, F et G trois espaces vectoriels normés

$$\forall f \in \mathcal{L}(E, F), \forall g \in \mathcal{L}(F, G) \quad \|g \circ f\| \leq \|g\| \|f\|$$

Théorème IV - 5 : Applications multilinéaires

Soit $E = E_1 \times \dots \times E_p$ un espace vectoriel produit d'espaces vectoriels normés.

Soit u une application p linéaire de E .

u est continue si et seulement si il existe $C \in \mathbb{R}_+^*$, tel que pour tout $(x_1, \dots, x_p) \in E$,

$$\|u(x_1, x_2, \dots, x_p)\| \leq k \|x_1\| \|x_2\| \dots \|x_p\|$$

V Connexité

Définition V - 1 : Chemin entre deux points

Soit a et b deux éléments de E . On appelle chemin continu joignant a et b l'image de toute application continue f de $[0, 1]$ telle que $f(0) = a$ et $f(1) = b$.

On dit que c'est un chemin de A (partie de E contenant a et b) si son image est dans A .

Propriété V - 1 : Relation d'équivalence

La relation binaire définie par $a \mathcal{R} b \ll$ il existe un chemin continu joignant a à $b \gg$, est une relation d'équivalence sur E .

Si A est une partie de E , il en va de même pour la relation donnée par les chemins continus de A . Les classes d'équivalence pour cette relation sont appelées composantes connexes par arcs de A .

Définition V - 2 : Partie connexe par arcs

Soit A une partie non vide d'un espace vectoriel normé E . On dit que A est connexe par arcs si, pour tout couple (a, b) de points de A , il existe un chemin continu dans A joignant a à b , c'est-à-dire si A est l'unique composante connexe par arcs de A .

Exemple V - 1 :

Les parties convexes et les parties étoilées sont connexes par arcs.

Proposition V - 1 : Parties connexes par arcs de \mathbb{R}

Les parties connexes par arcs de \mathbb{R} sont les intervalles

Proposition V - 2 : Image par une application continue

L'image par une application continue d'un connexe par arcs est connexe par arcs

Théorème V - 1 : des valeurs intermédiaires

Soit $f : A \subset E \rightarrow \mathbb{R}$, avec A une partie connexe par arcs.

Soit $(a, b) \in A^2$, avec $f(a) < f(b)$, alors :

$$\forall \lambda \in [f(a), f(b)], \exists c \in A \text{ tel que } f(c) = \lambda.$$

VI Dimension finie

Théorème VI - 1 : Equivalence des normes

Dans un espace vectoriel de dimension finie toutes les normes sont équivalentes.

Théorème VI - 2 : Dimension finie

Si E est un espace vectoriel de dimension finie alors toute application linéaire de E vers un espace vectoriel normé est continue.

Proposition VI - 1 : Coordonnées

Une application de E dans F admet une limite (pas infinie ici) si et seulement si les applications coordonnées dans une base de F admettent des limites finies

Proposition VI - 2 : Applications multilinéaires

Soit $(E_i)_{i \in \llbracket 1, m \rrbracket}$ une famille d'espaces vectoriels de dimensions finies. Toute application m -linéaire de $E_1 \times E_2 \times \dots \times E_m$ dans F (espace vectoriel de dimension finie) est continue.

De plus : pour toute f m -linéaire de $(E_i)_{i \in \llbracket 1, m \rrbracket}$ dans F

$$\exists C \in \mathbb{R}_+^*, \quad \forall x = (x_i)_{i \in \llbracket 1, m \rrbracket} \quad \|f(x)\| \leq C \|x_1\|_1 \dots \|x_m\|_m$$

Corollaire VI - 1 : Applications polynômiales

Toute application polynômiale est continue.