Topologie des espaces vectoriels normés

MP Lycée Clemenceau

Table des matières

I Normes **2**
1) Définitions . . . 2
2) Normes usuelles . . . 4
3) Suites dans un espace vectoriel normé . . . 5
4) Comparaison de normes . . . 6

II Topologie **6**
1) Généralités . . . 6
2) Parties compacts . . . 8
3) Cas de la dimension finie . . . 9
4) Séries . . . 9

III Etude locale **10**

IV Etude globale **12**
1) Généralités . . . 12
2) Cas particulier : les applications linéaires . . . 13

V Connexité **14**

VI Dimension finie **15**

I Normes

1) Définitions

Définition I - 1 : Norme

Soit E un $\mathbb{K}$-espace vectoriel, on appelle norme sur E toute application φ de E dans $\mathbb{R}_+$, vérifiant :

a) $\forall x \in E \quad \varphi(x) = 0 \Leftrightarrow x = 0$ (axiome de séparation)

b) $\forall (x, \lambda) \in E \times K \quad \varphi(\lambda x) = |\lambda| \varphi(x)$ (axiome d'homogénéité)

c) $\forall (x, y) \in E^2 \quad \varphi(x + y) \leqslant \varphi(x) + \varphi(y)$ (inégalité triangulaire)

Propriété I - 1 : Inégalité triangulaire :

Si φ est une norme sur E alors on a :

$$\forall (x, y) \in E^2 \quad |\varphi(x) - \varphi(y)| \leqslant \varphi(x - y)$$

et donc

$$\forall (x, y) \in E^2 \quad |\varphi(x) - \varphi(y)| \leqslant \varphi(x + y) \leqslant \varphi(x) + \varphi(y)$$

Notation :

On note usuellement une norme $\|.\|$

Définition I - 2 : Espace vectoriel normé

Un espace vectoriel muni d'une norme est dit normé.
On note donc $(E, \| \ \|)$ pour désigné un espace vectoriel muni de la norme $\| \ \|$.

Définition I - 3 : Vecteur unitaire

Dans un espace vectoriel normé $(E, \| \ \|)$, on appelle vecteur unitaire tout vecteur u de E tel que $\|u\| = 1$

Définition I - 4 : Norme produit

Soit $((E_i, N_i))_{i \in [\![1,r]\!]}$ une famille d'espaces vectoriels normés, définis sur un même corps.
On appelle norme produit sur $E_1 \times E_2 \times \cdots \times E_r$ l'application

$$N : \begin{array}{ccc} E_1 \times E_2 \times \cdots \times E_r & \longrightarrow & \mathbb{R}^+ \\ (x_i)_{i \in [\![1,r]\!]} & \longmapsto & \sup \{N_i(x_i) \ / \ i \in [\![1,r]\!]\} \end{array}$$

Définition I - 5 : Distance sur un espace vectoriel

Soit E un $\mathbb{K}$ espace vectoriel. On appelle distance sur E toute application de E^2 dans $\mathbb{R}^+$ vérifiant

$$\begin{array}{rcl} \forall (x, y) \in E^2 \ , \ d(x, y) = 0 & \Leftrightarrow & x = y \\ \forall (x, y) \in E^2 \ , \ d(x, y) & = & d(y, x) \\ \forall (x, y, z) \in E^3 \ , \ d(x, z) & \leqslant & d(x, y) + d(y, z) \end{array}$$

Définition I - 6 : Distance associée à un norme

Soit $(E, \| \ \|)$ un espace vectoriel normé, l'application d définie par

$$d: \begin{array}{ccc} E^2 & \to & \mathbb{R}^+ \\ (x,y) & \mapsto & d(x,y) = \|x-y\| \end{array}$$

est une distance sur E, appelée distance associée à la norme $\| \ \|$

Définition I - 7 : Boules et sphère

Soit $(E, \| \ \|)$ un espace vectoriel normé, on appelle

— boule ouverte de centre $a \in E$ et de rayon $r \in \mathbb{R}_+^*$ l'ensemble

$$B(a,r) = \{x \in E \quad / \quad \|a-x\| < r\}$$

— boule fermée de centre $a \in E$ et de rayon $r \in \mathbb{R}^+$ l'ensemble

$$B_f(a,r) = \overline{B(a,r)} = \{x \in E \quad / \quad \|a-x\| \leqslant r\}$$

— sphère de centre $a \in E$ et de rayon $r \in \mathbb{R}^+$ l'ensemble

$$\mathcal{S}(a,r) = \{x \in E \quad / \quad \|x-a\| = r\}$$

Définition I - 8 : Segment

Soient x et y deux vecteurs distincts de E, espace vectoriel réel, on appelle segment $[x,y]$ l'ensemble

$$[x,y] = \{z \in E \ / \ \exists \lambda \in [0,1], z = (1-\lambda)x + \lambda y\}$$

Définition I - 9 : Partie convexe

Soit A une partie non vide de E.
On dit que A est une partie convexe de E si pour tout $(x,y) \in A^2$, le segment $[x,y]$ est inclus dans A.

Proposition I - 1 : Convexité

Une boule (ouverte ou fermée) d'un espace vectoriel normé E est convexe.

Définition I - 10 : Partie bornée

Une partie A de E est dite bornée si : $\exists M \in \mathbb{R}^{+*} \quad / \quad \forall x \in A \qquad \|x\| \leq M$

Proposition I - 2 :

— Toute sous partie d'une partie borné est bornée
— Toute réunion finie de parties bornées est une partie bornée.
— Toute intersection de parties bornées est une partie bornée.

Définition I - 11 : Application bornée

Une application f d'un ensemble X (non vide) à valeurs dans E est dite bornée si l'ensemble $f(X)$ est une partie bornée de E.

2) Normes usuelles

3) Suites dans un espace vectoriel normé

Définition I - 12 :

Soit $(E, \| \|)$ un espace vectoriel normé. On considère une suite d'éléments de E, $(x_n)_{\in \mathbb{N}}$. On dit que cette suite est :

— bornée s'il exsite $M \in \mathbb{R}^+$ tel que pour tout entier n

$$\|x_n\| \leqslant M$$

— convergente s'il existe $\ell \in E$ tel que

$$\forall \varepsilon > 0, \exists n_0 \in \mathbb{N} \text{ tel que } \forall n > n_0, \|\ell - x_n\| < \varepsilon$$

Ce qui revient à dire que la suite $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge vers ℓ si et seulement si la suite réelle $(\|\ell - x_n\|)_{n\in\mathbb{N}}$ converge vers 0

— divergente si elle n'est pas convergente.

Proposition I - 3 :

— Si une suite converge, alors sa limite est unique
— Toute suite convergente est bornée.
— L'ensemble des suites convergentes est un espace vectoriel et l'application qui, à la suite, associe sa limite est linéaire.

Proposition I - 4 : Suite à valeurs dans un produit fini d'espaces vectoriels normés.

Soit $(E_k, \| \|_k)_{k\in[\![1,p]\!]}$ une famille finie d'espaces vectoriels normés. On considère une suite $U = (u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ d'éléments de $E = E_1 \times ... \times E_p$.

Pour $n \in \mathbb{N}$ on pose $u_n = (x_{1,n}, .., x_{p,n})$. On a alors, la suite U est une suite convergente de E si et seulement si pour tout $i \in [\![1, p]\!]$, la suite $(x_{i,n})_{n\in\mathbb{N}}$ est convergente.

De plus, dans le cas de la convergence, on a $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n = \left(\lim\limits_{n\to+\infty} x_{1,n}, ..., \lim\limits_{n\to+\infty} x_{p,n}\right)$.

Rappels

Définition I - 13 : Suites extraites

Soit $U = (u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite d'éléments d'un espace vectoriel normé. Une suite $(v_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est une suite extraite de U s'il existe une application φ de $\mathbb{N}$ dans $\mathbb{N}$ strictement croissante telle que pour tout $n \in \mathbb{N}$, $v_n = u_{\varphi(n)}$.

Définition I - 14 : Valeur d'adhérence

On appelle valeur d'adhérence d'une suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ tout élément $x \in E$ tel qu'il existe une suite extraite convergeant vers cet élément.

Propriété I - 2 :

Une suite ayant au moins deux valeurs d'adhérence diverge.

4) Comparaison de normes

Proposition I - 5 :
Soit N et N' deux normes définies sur un même espace vectoriel.
Toute suite convergeant au sens de N converge aussi au sens de N' si et seulement si il existe $\alpha \in \mathbb{R}_+^*$ tel que $N' \leq \alpha N$

Définition I - 15 : Normes équivalentes
Soient N_1 et N_2 deux normes définies sur un même espace vectoriel. On dit que ces normes sont équivalentes s'il existe un couple $(\alpha, \beta) \in \mathbb{R}^{+*2}$ tel que

$$\forall x \in E \qquad \alpha N_1(x) \leq N_2(x) \leq \beta N_1(x)$$

Propriété I - 3 :
Si deux normes sont équivalentes alors toute suite bornée pour une norme est bornée pour l'autre.

Proposition I - 6 :
Deux normes sont équivalentes si et seulement si toute suite convergente pour l'une est convergente pour l'autre.

II Topologie

1) Généralités

Dans toute la suite de ce paragraphe $(E, \| \|)$ est un espace vectoriel normé dont la norme est fixée.

Définition II - 1 : Partie ouverte
On appelle partie ouverte, ou encore plus souvent ouvert de E, toute partie A de E qui est soit vide, soit non vide et telle que, pour tout $a \in A$, il existe $r \in \mathbb{R}_+^*$ tel que $B(a, r) \subset A$.

Exemple II - 1 :
Une boule ouverte est un ouvert.

Propriété II - 1 :
Un produit fini d'ouverts est un ouvert.

Définition II - 2 : Voisinage d'un point a
On appelle voisinage d'un élément $a \in E$ toute partie de E contenant une boule ouverte centrée en a.
L'ensemble des voisinages de a est souvent noté $\mathscr{V}(a)$.

Définition II - 3 : Partie fermée
Une partie fermée, appelée encore fermé de E, est une partie de E dont le complémentaire est un ouvert de E

Propriété II - 2 : Fondamentale : Réunion et intersection d'ouverts et fermés

i) La réunion quelconques d'ouverts est un ouvert

ii) L'intersection quelconque de fermés est un fermé

iii) L'intersection d'un nombre fini d'ouverts est un ouvert

iv) L'union de deux fermés est un fermé

Définition II - 4 : Point adhérent à une partie

Soit A une partie non vide de E, un élément a de E est dit adhérent à A si pour tout $r \in \mathbb{R}_+^*$ on a $B(a, r) \cap A \neq \emptyset$.
L'ensemble des points d'adhérence de A est appelé adhérence de A et noté $\overline{A}$.

Proposition II - 1 : Caractérisation d'un fermé

Une partie non vide A est un fermé si et seulement si tout point adhérent de A est un point de A.

Proposition II - 2 : Caractérisation d'un point adhérent

Soit A une partie non vide de A. Un point x_0 de E est adhérent à A si et seulement si, il existe une suite d'éléments de A convergente vers x_0.

Corollaire II - 1 : Caractérisation d'un fermé

A est un fermé si et seulemet si toute suite d'éléments de A convergente, converge dans A

Définition II - 5 : Partie dense

Une partie non vide A de E est dense dans E si $\overline{A} = E$.

Définition II - 6 : Point intérieur et intérieur d'une partie

Soit A une partie de E. Un élément a de E est appelé point intérieur de A s'il existe $r \in \mathbb{R}_+^*$ tel que $B(a, r) \subset A$.
L'ensemble des points intérieur de A est appelé intérieur de A et noté $\mathring{A}$.

Définition II - 7 : Frontière

Soit A une partie de E. On appelle frontière de A l'ensemble des points adhérents à A et à son complémentaire, ou encore $Fr(A) = \overline{A} \setminus \mathring{A}$.

Propriété II - 3 : Topologie et normes équivalentes

Si N et N' sont deux normes équivalentes de E alors les définitions topologiques selon les normes sont équivalentes.

Définition II - 8 : Topologie relative

Soit $(E, \| \|)$ un espace vectoriel normé et A une partie non vide de A.

— On appelle ouvert relatif de A toute partie U de A telle que

$$\forall b \in U \quad \exists r > 0, \forall a \in A, \|a - b\| < r \Rightarrow a \in U$$

— On appelle fermé relatif de A toute partie de A telle que $A \setminus B$ est un ouvert relatif de A.

— Soit $a \in A$, on dit que B, partie de A, est un voisinage relatif de a dans A si

$$\exists r > 0, \forall a \in A, \|a - b\| < r \Rightarrow a \in B$$

Propriété II - 4 :

Une partie U de A est un ouvert relatif si U est voisinage relatif de chacun de ses points.

Propriété II - 5 :

Soit $(E, \| \|)$ un espace vectoriel normé et A une partie non vide de A.

— U est un ouvert relatif de A si et seulement si il existe V un ouvert de E tel que $U = A \cap V$

— U est un fermé relatif de A si et seulement si il existe V un fermé de E tel que $U = A \cap V$

2) Parties compacts

Définition II - 9 : Séquentielle d'une partie compacte

Soit $(E, \| \|)$ un espace vectoriel normé. Une partie non vide A est une partie compact de E si toute suite d'éléments de A admet au moins une valeur d'adhérence dans A.

Propriété II - 6 :

Tout compact de E est une partie fermée et bornée.

Proposition II - 3 :

Toute sous partie fermée d'un compact est un compact.

Proposition II - 4 :

Un fermé relatif d'une partie compacte est compact.

Théorème II - 1 : Suite dans un compact

Une suite d'éléments d'un compact converge si et seulement si elle admet une unique valeur d'adhérence.

Proposition II - 5 : Produit de compacts

Soit $(E_k, \| \|_k)_{k \in [\![1,p]\!]}$ une famille finie d'espaces vectoriels normés. Si $(C_k)_{k \in [\![1,p]\!]}$ est une famille de parties compactes, avec, pour tout $k \in [\![1, p]\!]$, $C_k \subset E_k$, alors $C_1 \times .. \times C_p$ est une partie compact de l'espace produit.

3) Cas de la dimension finie

Théorème II - 2 : Équivalence des normes

Si E est un espace vectoriel de dimension finie alors toutes normes sont équivalentes.

Proposition II - 6 : Compacts

Une partie d'un espace normé de dimension finie est compacte si et seulement si elle est fermée et bornée.

Corollaire II - 2 :

Une suite bornée d'un espace normé de dimension finie converge si et seulement si elle a une unique valeur d'adhérence.

Proposition II - 7 :

Un sous-espace de dimension finie d'un espace normé est fermé.

4) Séries

Définition II - 10 : Série absolument convergente

Soit $(E, \| \|)$ un espace vectoriel normé.

Soit $\sum x_n$ une série d'éléments de E. On dit que la série est absolument convergente si la série $\sum \|x_n\|$ est convergente.

Théorème II - 3 :

Une série absolument convergente d'éléments d'un espace vectoriel normé de dimension finie est convergente.

Propriété II - 7 :

L'application N de $\mathscr{M}_n(\mathbb{K})$ dans $\mathbb{R}^+$ définie par

$$M = (m_{i,j})_{(i,j)\in[\![1,n]\!]} \longmapsto \max_{i\in[\![1,n]\!]} \sum_{j=1}^{n} |m_{i,j}|$$

est une norme sur $\mathscr{M}_n(\mathbb{K})$.

De plus celle-ci vérifie :

$$\forall (A,B) \in \mathscr{M}_n(\mathbb{K})^2 \quad N(AB) \leqslant N(A)N(B)$$

Proposition II - 8 : Exponentielle de matrice

Soit $A \in \mathscr{M}_n(\mathbb{K})$, la série $\sum \frac{1}{n!}A^n$ est convergente.

Sa somme est appelée exponentielle de A et notée :

$$\exp(A) = \mathrm{e}^A = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{1}{n!}A^n$$

III Etude locale

On considère deux espaces vectoriels normés $(E, \| \ \|)$ et (F, N).

Définition III - 1 : Limite en un point

Soit A une partie non vide de E. Soient f une application définie sur A à valeurs dans F et a un point adhérent à A.
On dit que f admet une limite en a s'il existe $\ell \in F$ tel que, pour tout voisinage $\mathcal{V}$ de ℓ il existe un voisinage $\mathcal{U}$ de a tel que pour tout $x \in \mathcal{U} \cap A$, $f(x) \in \mathcal{V}$.
On peut aussi dire que l'image réciproque de tout voisinage de ℓ est un voisinage de a dans $A \cup \{a\}$ (c'est à dire un voisinage relatif à $A \cup \{a\}$ de a).
Cela peut encore s'écrire :

$$\forall \varepsilon > 0,\ \exists r > 0 \text{ tel que } \ \forall x \in A \ \|x - a\| < r \Rightarrow N\left(f(x) - \ell\right) < \varepsilon$$

Définition III - 2 : Généralisation

1) Soit f une application définie sur E à valeurs dans F.
On dit que f admet une limite en l'infini s'il existe $\ell \in F$ tel que

$$\forall \varepsilon > 0,\ \exists R > 0 \ / \ \|x\| > R \Rightarrow N\left(f(x) - \ell\right) < \varepsilon$$

2) Soit f une application définie sur $[a_0, +\infty[$ (resp. $]-\infty, a]$) à valeurs dans F.
On dit que f admet une limite en $+\infty$ (resp. $-\infty$) s'il existe $\ell \in F$ tel que

$$\forall \varepsilon > 0,\ \exists R > 0 \ / \ x > R \,(\text{resp. } x < R) \Rightarrow N\left(f(x) - \ell\right) < \varepsilon$$

3) Soient f une application définie sur $A \subset E$ à valeurs dans $\mathbb{R}$ et a un point adhérent à A.
On dit que f admet $+\infty$ (resp. $-\infty$) comme limite en a si

$$\forall R \in \mathbb{R},\ \exists r > 0 \text{ tel que } \ \forall x \in A \ \|x - a\| < r \Rightarrow f(x) > R \ (\text{resp. } f(x) < R)$$

Proposition III - 1 : Caractérisation séquentielle

Soient f une application de $A \subset E$ dans F et $a \in \overline{A}$.
f admet pour limite ℓ en a si et seulement si pour toute suite $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ d'éléments de A convergeant vers a, la suite $(f(u_n))_{n \in \mathbb{N}}$ converge vers ℓ.

Proposition III - 2 : Application dans un produit fini d'espaces vectoriels normés

Soit $((F_i, N_i))_{i \in [\![1,p]\!]}$ une famille finie d'espaces vectoriels normés , on pose $F = F_i \times .. \times F_p$ muni de la norme produit. Soit f une application de $A \subset E$ dans F. On note $f = (f_i)_{i \in [\![1,p]\!]}$, avec, pour $i \in [\![1,p]\!]$ $f_i : A \to F_i$.
Soit $a \in \overline{A}$. f admet une limite en a si et seulement si pour tout $i \in [\![1,p]\!]$, f_i admet une limite en a.

Proposition III - 3 : Opérations algébriques sur les limites.

Soient $(E, \| \|)$ et (F, N) deux espaces vectoriels normés , $A \subset E$.
Soit $a \in \overline{A}$. On considère f et g deux applications définies sur A admettant une limite en a. On note ℓ_1 et ℓ_2 les limites respectives.
On a alors :

- $f + g$ admet une limite en a qui est $\ell_1 + \ell_2$.
- pour $\lambda \in \mathbb{K}$, l'application λf admet une limite qui est $\lambda \ell_1$.
- si f et g sont à valeurs dans $\mathbb{K}$, l'application fg admet une limite qui est $\ell_1 \ell_2$.

On a donc : l'ensemble des applications de $A \subset E$ dans F admettant une limite en $a \in \overline{A}$ est un espace vectoriel. Si de plus $F = \mathbb{K}$ alors c'est une $\mathbb{K}$-algèbre.

Proposition III - 4 : Composées

Soient $(E, \| \|)$, (F, N) et (G, N_G) trois espaces vectoriels normés .
On considère les applications f de $A \subset E$ dans F et g de $B \subset F$ dans G, composables, c'est-à-dire $f(A) \subset B$.
Soit $a \in \overline{A}$. On suppose que f admet une limite ℓ en a.
On a alors que $\ell \in \overline{B}$.
Si de plus g admet une limite en ℓ alors l'application $g \circ f$ admet une limite en a et $\lim\limits_{x \to a} g \circ f = \lim\limits_{y \to \ell} g$.

Définition III - 3 : Continuité en $a \in A$

Soit f une application de $A \subset E$ dans F. Soit $a \in A$. Si f admet une limite en a alors celle-ci est $f(a)$ et on dit alors que f est continue en a.

Propriété III - 1 : Caractérisation séquentielle

Soient f une application de $A \subset E$ dans F et $a \in A$.
f est continue en a si et seulement si pour toute suite $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ d'éléments de A convergeant vers a, la suite $(f(u_n))_{n \in \mathbb{N}}$ converge vers $f(a)$.

Propriété III - 2 : Espace des applications continues en a.

L'ensemble des applications définies sur A continues en a est un $\mathbb{K}$-espace vectoriel.
Si l'espace d'arrivé est $\mathbb{K}$ alors c'est une $\mathbb{K}$ algèbre.

Propriété III - 3 : Composée

Soient deux applications f et g composables. Si f est continue en a et g est continue en $f(a)$ alors $g \circ f$ est continue en a.

IV Etude globale

1) Généralités

Proposition IV - 1 :
Soit A un ensemble non vide et $(F, \| \ \|)$ un espace vectoriel normé, l'ensemble des applications bornées de A dans F est un sous espace vectoriel de F^A et l'application $N_\infty : f \to \sup_A \|f\|$ est une norme sur $\mathcal{B}(A, F)$

Définition IV - 1 : Continuité sur A
On dit qu'une application définie sur A est continue si elle est continue en tout point de A.

Propriété IV - 1 : Espace des applications continues
L'ensemble des applications définies sur A continues est un $\mathbb{K}$-espace vectoriel.

Propriété IV - 2 : Composée
Soient deux applications $f : A \to F$ et $g : B \to G$ composables. Si f et g sont continue alors $g \circ f$ est continue sur A.

Proposition IV - 2 : Applications à valeurs dans $\mathbb{K}$
L'ensemble des fonctions continues à valeurs réelles ou complexes est une algèbre.

Proposition IV - 3 : Densité
Soient $f : B \subset E \to F$ et $g : B \subset E \to F$ deux applications continues. S'il existe $A \subset B$ tel que les deux applications sont identiques sur A et tel que A soit dense dans B, alors f et g sont identiques sur B.

Proposition IV - 4 : Ouvert et fermé
Soit f une application continue de E dans F. On a alors

a) L'image réciproque d'un ouvert de F est un ouvert de E

b) L'image réciproque d'un fermé de F est un fermé de E

Définition IV - 2 : Uniforme continuité
Soit f une application définie sur $A \subset E$ à valeurs dans F. On dit que f est uniformément continue sur A si

$$\forall \varepsilon > 0 \ \exists \delta > 0 \text{ tel que } \ \forall (x, y) \in A^2 \ \|x - y\|_E < \delta \Rightarrow \|f(x) - f(y)\|_F < \varepsilon$$

Définition IV - 3 : Applications lipschitzienne
Soit $f : A \subset E \to F$ et $k \in \mathbb{R}_+^*$. On dit que f est k-lipschitzienne si

$$\forall (x, y) \in A^2 \quad \|f(x) - f(y)\|_F \leqslant k \|x - y\|_E$$

Propriété IV - 3 : Uniforme continuité et application lipschitzienne

Les applications lipschitziennes sont uniformément continues.

Théorème IV - 1 : de Heine

Les applications continues sur un compact sont uniformément continues

Théorème IV - 2 :

Soit f une application continue de $A \subset E$ dans F. Pour tout compact inclus dans A, l'image de ce compact est un compact de F.

Proposition IV - 5 : Application : existence des extréma pour une fonction à valeurs réelles.

Si f est une fonction continue définie sur un compact K de E à valeurs réelles, alors $f(K)$ est un compact de la droite réelle. C'est à dire que f est bornée et atteint ses bornes.

2) Cas particulier : les applications linéaires

Théorème IV - 3 :

Soit $f \in \mathscr{L}(E,F)$.
On a équivalence entre les assertions suivantes :

a) f est continue

b) f est continue en 0

c) f est bornée sur $B_f(0,1)$

d) $\exists k \in \mathbb{R}$ tel que $\|f(x)\| \leq k.\|x\|$

e) f est lipschitzienne.

f) f est uniformément continue

Notation :

L'ensemble des applications linéaires continues de E dans F est noté $\mathscr{L}_c(E,F)$

Proposition IV - 6 :

Soit E et F deux espaces vectoriels normés. Soit $f \in \mathscr{L}_c(E,F)$. On pose

$$|||f||| = \inf\left\{C \in \mathbb{R}_+ / \forall x \in E \quad \|f(x)\|_F \leqslant C\|x\|_E\right\}$$

On a alors

$$|||f||| = \sup_{\|x\|_E \neq 0} \frac{\|f(x)\|_F}{\|x\|_E} = \sup_{\|x\|_E = 1} \|f(x)\|_F = \sup_{\|x\|_E \leqslant 1} \frac{\|f(x)\|_F}{\|x\|_E}$$

De plus

$$\forall x \in E \quad \|f(x)\|_F \leqslant |||f|||\,\|x\|_E$$

Théorème IV - 4 : Norme subordonnée

Soit E et F deux espaces vectoriels normés.
L'application définie sur $\mathscr{L}_c(E,F)$ qui, à f, associe $|||f|||$ est une norme sur $\mathscr{L}_c(E,F)$.
Cette norme est sous multiplicative : pour E, F et G trois espaces vectoriels normés

$$\forall f \in \mathscr{L}(E,F), \forall g \in \mathscr{L}(F,G) \quad |||g \circ f||| \leqslant |||g|||\, |||f|||$$

Théorème IV - 5 : Applications multilinéaires

Soit $E = E_1 \times \dots E_p$ un espace vectoriel produit d'espaces vectoriels normés.
Soit u une application p linaire de E.
u est continue si et seulement si il existe $C \in \mathbb{R}_+^*$, tel que pour tout $(x_1, \dots, x_p) \in E$,
$\|u(x_1, x_2, .., x_p)\| \leqslant k\, \|x_1\|\, \|x_2\| .. \|x_p\|$

V Connexité

Définition V - 1 : Chemin entre deux points

Soit a et b deux éléments de E. On appelle chemin continu joignant a et b l'image de toute application continue f de $[0,1]$ telle que $f(0) = a$ et $f(1) = b$.
On dit que c'est un chemin de A (partie de E contenant a et b) si son image est dans A.

Propriété V - 1 : Relation d'équivalence

La relation binaire définie par $a\mathcal{R}b$ « il existe un chemin continu joignant a à b », est une relation d'équivalence sur E.
Si A est une partie de E, il en va de même pour la relation donnée par les chemins continus de A. Les classes d'équivalence pour cette relation sont appelées composantes connexes par arcs de A.

Définition V - 2 : Partie connexe par arcs

Soit A une partie non vide d'un espace vectoriel normé E. On dit que A est connexe par arcs si, pour tout couple (a,b) de points de A, il existe un chemin continu dans A joignant a à b, c'est-à-dire si A est l'unique composante connexe par arcs de A.

Exemple V - 1 :

Les parties convexes et les parties étoilées sont connexes par arcs.

Proposition V - 1 : Parties connexes par arcs de $\mathbb{R}$

Les parties connexes par arcs de $\mathbb{R}$ sont les intervalles

Proposition V - 2 : Image par une application continue

L'image par une application continue d'un connexe par arcs est connexe par arcs

Théorème V - 1 : des valeurs intermédiaires

Soit $f : A \subset E \to \mathbb{R}$, avec A une partie connexe par arcs.
Soit $(a,b) \in A^2$, avec $f(a) < f(b)$, alors :
$\forall \lambda \in [f(a), f(b)]$, $\exists c \in A$ tel que $f(c) = \lambda$.

VI Dimension finie

Théorème VI - 1 : Equivalence des normes

Dans un espace vectoriel de dimension finie toutes les normes sont équivalentes.

Proposition VI - 1 : Coordonnées

Une application de E dans F admet une limite (pas infinie ici) si et seulement si les applications coordonnées dans une base de F admettent des limites finies

Proposition VI - 2 : Applications multilinéaires

Soit $(E_i)_{i\in[\![1,m]\!]}$ une famille d'espaces vectoriels de dimensions finies. Toute application m-linéaire de $E_1 \times E_2 .. \times E_m$ dans F (espace vectoriel de dimension finie) est continue.
De plus : pour toute f m-linéaire de $(E_i)_{i\in[\![1,m]\!]}$ dans F

$$\exists C \in \mathbb{R}_+^*, \quad \forall x = (x_i)_{i\in[\![1,m]\!]} \quad \|f(x)\| \leqslant C \|x_1\|_1 \dots \|x_m\|_m$$

Corollaire VI - 1 : Applications polynômiales

Toute application polynômiale est continue.