Intégrale sur un intervalle quelconque

MP Lycée Clemenceau

Table des matières

I Intégrale sur $[a, +\infty[$

1) Intégrale généralisée

Définition I - 1 : Fonctions continues par morceaux sur I

Soit I un intervalle de $\mathbb{R}$ quelconque. On considère f définie sur I à valeurs dans $\mathbb{K}$.
On dit que f est continue par morceaux sur I si pour tout segment J inclus dans I, la restriction de f à J est continue par morceaux.

Définition I - 2 : Intégrale convergente

Soit f une fonction continue par morceaux sur $I = [a, +\infty[$.
On dit que l'intégrale $\displaystyle\int_a^{+\infty} f$ est convergente si la fonction qui, à x, associe $\displaystyle\int_a^x f$ a une limite finie en $+\infty$.
Si tel est le cas, on note $\displaystyle\int_a^{+\infty} f$ cette limite, ou encore $\displaystyle\int_a^{+\infty} f(t)\,dt$.

Proposition I - 1 : Dérivation

Soit f une fonction continue sur $I = [a, +\infty[$.
Si l'intégrale $\displaystyle\int_a^{+\infty} f$ est convergente alors la fonction F définie sur I par :

$$\forall x \in I \qquad F(x) = \int_x^{+\infty} f$$

est correctement définie et de classe $\mathscr{C}^1$ sur I. De plus

$$\forall x \in I \qquad F'(x) = -f(x)$$

2) Intégrabilité

Définition I - 3 : Fonction intégrable sur $[a, +\infty[$

Une fonction f est dite intégrable sur $[a, +\infty[$ si elle est continue par morceaux sur $[a, +\infty[$ et si $\displaystyle\int_a^{+\infty} |f|$ converge.

Propriété I - 1 :

Soit f une fonction continue par morceaux à valeurs réelles de signe constant.
L'intégrale $\displaystyle\int_a^{+\infty} f$ converge si et seulement si f est intégrable sur $[a, +\infty[$.

Propriété I - 2 : Intégrabilité et convergence de l'intégrale

Si f est intégrable sur $[a,+\infty[$, alors $\displaystyle\int_a^{+\infty} f$ converge.

De plus on a

$$\left|\int_a^{+\infty} f\right| \leqslant \int_a^{+\infty} |f|$$

3) Fonctions positives

Proposition I - 2 :

Une fonction f continue par morceaux et positive sur $I=[a,+\infty[$ est intégrable si et seulement si la fonction $x\mapsto \displaystyle\int_a^x f$ est majorée sur I.

Proposition I - 3 :

Soit $\alpha\in\mathbb{R}$, la fonction $t\mapsto \dfrac{1}{t^\alpha}$ est intégrable sur $[1,+\infty[$ si et seulement si $\alpha>1$.

Proposition I - 4 :

Soit $a\in\mathbb{R}$, la fonction $x\mapsto \mathrm{e}^{-ax}$ est intégrable sur $\mathbb{R}_+$ si et seulement si $a>0$.

Proposition I - 5 : Comparaisons

Soient f et g deux fonctions continues par morceaux sur $[a,+\infty[$ à valeurs dans $\mathbb{K}$:
- si $0\leqslant f\leqslant g$, l'intégrabilité de g sur $[a,+\infty[$ implique celle de f ;
- si $f(x) \underset{x\to+\infty}{=} O(g(x))$, l'intégrabilité de g sur $[a,+\infty[$ implique celle de f ;
- si $f(x) \underset{x\to+\infty}{\sim} g(x)$, l'intégrabilité de g sur $[a,+\infty[$ équivaut à celle de f ;

Corollaire I - 1 : (HP)

Soit $a\in\mathbb{R}$ et f une fonction continue par morceaux sur $I=[a,+\infty[$, positive.
- si $\displaystyle\lim_{t\to+\infty} t^\alpha f(t)\in\mathbb{R}$, avec $\alpha>1$ alors f est intégrable sur I
- si $\displaystyle\lim_{t\to+\infty} tf(t)\in\overline{\mathbb{R}}\setminus\{0\}$ alors f n'est pas intégrable sur I.

II Intégration sur un intervalle quelconque

1) Définitions

Définition II - 1 : Intégrale convergente

Soit $(a,b) \in \mathbb{R}^2$ tel que $a < b$.
Soit f une fonction continue par morceaux sur $I = [a,b[$.
On dit que l'intégrale $\displaystyle\int_a^b f$ est convergente si la fonction qui à x associe $\displaystyle\int_a^x f$, a une limite finie en b.
Si tel est le cas, on note $\displaystyle\int_a^b f$ cette limite, ou encore $\displaystyle\int_a^b f(t)\,dt$.

Définition II - 2 : Intégrale convergente

Soit $(a,b) \in \overline{\mathbb{R}} \times \mathbb{R}$ tel que $a < b$.
Soit f une fonction continue par morceaux sur $I =]a,b]$. On dit que l'intégrale $\displaystyle\int_a^b f$ est convergente si la fonction $x \mapsto \displaystyle\int_x^b f$ a une limite finie en a.
Si tel est le cas, on note $\displaystyle\int_a^b f$ cette limite, ou encore $\displaystyle\int_a^b f(t)\,dt$.

Définition II - 3 : Intégrale convergente

Soit $(a,b) \in \overline{\mathbb{R}}^2$ tel que $a < b$.
Soit f une fonction continue par morceaux sur $I =]a,b[$. On dit que l'intégrale $\displaystyle\int_a^b f$ est convergente si, pour $c \in I$ les intégrales $\displaystyle\int_a^c f$ et $\displaystyle\int_c^b f$ sont convergentes. Si tel est le cas on note $\displaystyle\int_a^b f = \int_a^c f + \int_c^b f$, ou encore $\displaystyle\int_a^b f(t)\,dt = \int_a^c f(t)\,dt + \int_c^b f(t)\,dt$.

Proposition II - 1 : Linéarité

Soient f et g deux fonctions continues par morceaux sur I et $\lambda \in \mathbb{C}$. Si les intégrales $\displaystyle\int_I f$ et $\displaystyle\int_I g$ sont convergentes alors l'intégrale $\displaystyle\int_I (f + \lambda g)$ est convergente et on a de plus

$$\int_I (f + \lambda g) = \int_I f + \lambda \int_I g$$

Proposition II - 2 : Positivité

Soit f une fonction continue par morceaux sur I. Si $\forall x \in I,\ f(x) \geqslant 0$ alors, si l'intégrale $\displaystyle\int_I f$ est convergente,

$$\int_I f \geqslant 0$$

Si f et g sont deux fonctions continues par morceaux telles $\forall x \in I\ f(x) \leqslant g(x)$ et si les intégrales $\displaystyle\int_I f$ et $\displaystyle\int_I g$ sont convergente, alors

$$\int_I f \leqslant \int_I g$$

Théorème II - 1 : Intégration par parties

Soit I un intervalle de $\mathbb{R}$ et $(a,b) \in \overline{\mathbb{R}}^2$ tel que $\mathring{I} =]a,b[$.
Soient f et g deux fonctions de classe $\mathscr{C}^1$ sur I. On suppose que la fonction fg admet des limites finies en a et b. Les intégrales $\displaystyle\int_I f'g$ et $\displaystyle\int_I fg'$ sont alors de même nature et, dans le cas de la convergence on a :

$$\int_a^b f(t)g'(t)\,dt = [fg]_a^b - \int_a^b f'(t)g(t)\,dt$$

Théorème II - 2 : Changement de variables

Soit une fonction f continue sur $]a,b[$ et une fonction $\varphi :]\alpha,\beta[\to]a,b[$ bijective, strictement croissante et de classe $\mathscr{C}^1$, les intégrales $\displaystyle\int_a^b f(t)\,dt$ et $\displaystyle\int_\alpha^\beta f(\varphi(u))\,\varphi'(u)\,du$ sont de même nature et égales en cas de convergence.
Si φ est strictement décroissante les intégrales sont encore de même nature mais on a, en cas de convergence :

$$\int_a^b f(t)\,dt = \int_\alpha^\beta f(\varphi(u))\left|\varphi'(u)\right|\,du$$

2) Fonctions intégrables

Définition II - 4 : Intégrabilité

Soit I un intervalle de $\mathbb{R}$ et f une fonction continue par morceaux définie sur I. On dit que f est intégrable sur I si l'intégrale $\displaystyle\int_I |f|$ est convergente.

On dit alors aussi que l'intégrale $\displaystyle\int_I f$ est absolument convergente.

Propriété II - 1 : Intégrabilité et convergence de l'intégrale

Si f est intégrable sur I, alors $\displaystyle\int_I f$ converge.
De plus on a l'inégalité suivante, appelée inégalité triangulaire :

$$\left|\int_I f\right| \leqslant \int_I |f|$$

Proposition II - 3 :

- Une fonction f continue par morceaux et positive sur $I = [a, b[$ est intégrable si et seulement si la fonction $x \mapsto \int_a^x f$ est majorée sur I.
- Une fonction f continue par morceaux et positive sur $I =]a, b]$ est intégrable si et seulement si la fonction $x \mapsto \int_x^b f$ est majorée sur I.

Propriété II - 2 :

La fonction f est intégrable en a (resp. b) si et seulement si $t \mapsto f(a+t)$ (resp. $t \mapsto f(b-t)$) est intégrable en 0.

Proposition II - 4 :

Soit $\alpha \in \mathbb{R}$, la fonction $t \mapsto \dfrac{1}{(b-t)^\alpha}$ est intégrable sur $[a, b[$ si et seulement si $\alpha < 1$.

La fonction $t \mapsto \dfrac{1}{(t-a)^\alpha}$ est intégrable sur $]a, b]$ si et seulement si $\alpha < 1$

Proposition II - 5 : Comparaisons

Soient f et g deux fonctions réelles positives continues par morceaux sur $[a, b[$:
- si $0 \leqslant f \leqslant g$, l'intégrabilité de g sur $[a, b[$ implique celle de f ;
- si $f(x) \underset{x \to b}{=} O(g(x))$, l'intégrabilité de g sur $[a, b[$ implique celle de f ;
- si $f(x) \underset{x \to b}{\sim} g(x)$, l'intégrabilité de g sur $[a, b[$ équivaut à celle de f ;

Propriété II - 3 : $\mathcal{L}^1(I, \mathbb{K})$

L'ensemble des fonctions continues par morceaux sur I à valeurs dans $\mathbb{K}$, intégrables (sur I) est un $\mathbb{K}$-espace vectoriel noté $\mathcal{L}^1(I, \mathbb{K})$.

De plus l'application qui à f associe $\int_I f$ est linéaire.

Proposition II - 6 :

Si f est continue et intégrable sur I , à valeurs dans $\mathbb{R}^+$ et si $\int_I f = 0$, alors f est identiquement nulle.

III Intégration des relations de comparaison

Théorème III - 1 :

Soit g une fonction continue par morceaux définie sur $I = [a, b[$ à valeurs dans $\mathbb{R}^+$.
On considère une fonction f continue par morceaux sur I à valeurs dans $\mathbb{K}$.

1) On suppose que g est intégrable sur I.

a) si $f(x) = \underset{x \to b}{O}(g(x))$ alors f est intégrable sur I et on a

$$\int_x^b f(t)\,dt = \underset{x \to b}{O}\left(\int_x^b g(t)\,dt\right)$$

b) si $f(x) = \underset{x \to b}{o}(g(x))$ alors f est intégrable sur I et on a

$$\int_x^b f(t)\,dt = \underset{x \to b}{o}\left(\int_x^b g(t)\,dt\right)$$

c) si $f(x) \underset{x \to b}{\sim} g(x)$ alors f est intégrable sur I et on a

$$\int_x^b f(t)\,dt \underset{x \to b}{\sim} \int_x^b g(t)\,dt$$

2) On suppose que l'intégrale f sur I est divergente

a) si $f(x) = \underset{x \to b}{O}(g(x))$ alors g n'est pas intégrable sur I et on a

$$\int_a^x f(t)\,dt = \underset{x \to b}{O}\left(\int_a^x g(t)\,dt\right)$$

b) si $f(x) = \underset{x \to b}{o}(g(x))$ alors g n'est pas intégrable sur I et on a

$$\int_a^x f(t)\,dt = \underset{x \to b}{o}\left(\int_a^x g(t)\,dt\right)$$

c) si $f(x) \underset{x \to b}{\sim} g(x)$ alors g n'est pas intégrable sur I et on a

$$\int_a^x f(t)\,dt \underset{x \to b}{\sim} \int_a^x g(t)\,dt$$

IV Résumé

Pour montrer la convergence d'une intégrale ou l'intégrabilité d'une fonction $f : I \to \mathbb{K}$:

- on commence par valider le fait que la fonction est continue par morceaux sur l'intervalle d'intégration
- si $I = [a, b[$ il n'y a pas d'étude à faire en a puisque la fonction y est en général, continue
- si $I =]a, b]$ et que f admet une limite finie en a alors l'intégrale est faussement impropre donc convergente (f est prolongeable par continuité sur le segment $[a, b]$)
- si $I = [a, b[$, resp $I =]a, b]$, on cherche à majorer $|f|$ au voisinage de b, resp de a, par une fonction intégrable sur un voisinage de b, resp de a.
- si $I = [a, b[$, resp $I =]a, b]$, on cherche un équivalent de $|f|$, au voisinage de b, resp de a, intégrable sur un voisinage de b, resp de a.
- on utilise une intégration par parties
- on fait un changement de variable