Rappel d'algèbre linéaire et compléments

MP Lycée Clemenceau

Table des matières

I Notions générales

1) Généralités

a) Définitions

Dans tout le chapitre $\mathbb{K}$ désignera un corps commutatif égal à $\mathbb{R}$ ou $\mathbb{C}$. Cependant les notions peuvent être aussi définies avec un corps quelconque.

Définition I - 1 : Espace vectoriel

Soit $\mathbb{K}$ un corps commutatif, on dit que E est un **espace vectoriel sur** $\mathbb{K}$ (ou $\mathbb{K}$-espace vectoriel) si E est un groupe abélien et si E est muni d'une loi de composition externe à opérateurs dans $\mathbb{K}$, ayant les propriétés suivantes :

$$\left\{\begin{array}{l}\mathbb{K}\times E\to E\\(\lambda,x)\mapsto\lambda.x\end{array}\right.\quad\text{telle que}$$

$$\begin{array}{rcll}\forall\,(\lambda,\mu,x)&\in&\mathbb{K}^2\times E&(\lambda+\mu)\,.x=\lambda.x+\mu.x\\\forall\,(\lambda,x,y)&\in&\mathbb{K}\times E^2&\lambda.\,(x+y)=\lambda.x+\lambda.y\\\forall\,(\lambda,\mu,x)&\in&\mathbb{K}^2\times E&\lambda.\,(\mu.x)=(\lambda.\mu)\,x=\mu.\,(\lambda.x)\\\forall x&\in&E&1_{\mathbb{K}}.x=x\end{array}$$

Proposition I - 1 : Règles de calculs

Soit E un $\mathbb{K}$-espace vectoriel, on a alors :

$$\begin{array}{rcll}\forall x&\in&E,&0_{\mathbb{K}}.x=0_E\\\forall\alpha&\in&\mathbb{K},&\alpha.0_E=0_E\end{array}$$

$$\alpha.x=0_E\Leftrightarrow\alpha=0\text{ ou }x=0_E$$

$$\forall x\in E,\qquad(-1)\,.x=-x\text{ et }(-\alpha)\,.x=\alpha.\,(-x)=-\alpha.x$$

Définition I - 2 : Produit d'un nombre fini de $\mathbb{K}$-espaces vectoriels

Soit n un entier non nul. Soit $(E_i)_{i\in[\![1,n]\!]}$ une famille de n $\mathbb{K}$-espaces vectoriels. On appelle espace vectoriel produit de ces espaces l'ensemble $E=E_1\times E_2\times\cdots\times E_n$ muni des lois suivantes :

$$\forall\,((x_1,\ldots,x_n),(y_1,\ldots,y_n))\in E^2\quad(x_1,\ldots,x_n)+(y_1,\ldots,y_n)=(x_1+y_1,\ldots,x_n+y_n)$$

$$\forall(x_1,\ldots,x_n)\in E,\forall\lambda\in\mathbb{K}\quad\lambda\cdot(x_1,\ldots,x_n)=(\lambda x_1,\ldots,\lambda x_n)$$

E muni de ces deux lois est bien un $\mathbb{K}$-espace vectoriel.

b) Sous espaces vectoriels

Définition I - 3 : Sous espace vectoriel

Soit E un $\mathbb{K}$-espace vectoriel, soit G une partie de E, G est un sous espace vectoriel si : $G\neq\emptyset$, G est stable pour l'addition et la multiplication externe :

$$\forall\,(x,y)\in G^2,\forall\lambda\in\mathbb{K}\quad x+y\in G\quad\text{et}\quad\lambda.x\in G$$

Théorème I - 1 :

Soit E un $\mathbb{K}$-espace vectoriel et G un sous espace vectoriel de E, alors G munis des lois induites de E est un espace vectoriel.

Proposition I - 2 : Caractérisation des sous espaces vectoriels

Soit E un $\mathbb{K}$-espace vectoriel et G une partie non vide de E, G est un sous espace vectoriel de E si et seulement si

$$\forall (x, y) \in G^2, \forall (\lambda, \mu) \in \mathbb{K}^2 \quad \lambda.x + \mu.y \in G$$

ou encore

$$\forall (x, y) \in G^2, \forall \lambda \in \mathbb{K} \quad \lambda.x + y \in G$$

Proposition I - 3 : Intersection

L'intersection d'une famille non vide de sous espaces vectoriels est un sous espace vectoriel

Définition I - 4 : Sous espace engendré par A

Soit A une partie de E non vide, l'intersetion de tous les sous espaces vectoriels de E contenant A est un sous espace vectoriel (d'après la proposition précédente). C'est le plus petit sous espace vectoriel pour l'inclusion contenant A. On l'appelle sous espace vectoriel engendré par A et on le note $Vect\,(A)$.

Définition I - 5 : Somme

On définie la somme de deux sous espaces vectoriels par : soient F_1 et F_2 deux sous espaces vectoriels d'un espace vectoriel E, on a alors

$$F_1 + F_2 = \{x \in E \ / \ \exists\,(x_1, x_2) \in F_1 \times F_2, x = x_1 + x_2\}$$

Proposition I - 4 :

Soient F_1 et F_2 deux sous espaces vectoriels de E, on a alors les deux propriétés suivantes :

1) $F_1 + F_2$ est un sous espace vectoriel de E
2) $F_1 + F_2$ est le sous espace vectoriel engendré par $F_1 \cup F_2$

Définition I - 6 : Supplémentaires

Soient F_1 et F_2 deux sous espaces vectoriels de E, on dit que F_1 et F_2 sont **supplémentaires** si ils vérifient

$$F_1 + F_2 = E \qquad et \qquad F_1 \cap F_2 = \{0\}$$

On note alors $\boxed{F_1 \oplus F_2 = E}$

Proposition I - 5 :

soient F_1 et F_2 deux sous espaces supplémentaires de E, alors on a

$$\forall x \in E, \exists!\,(x_1, x_2) \in F_1 \times F_2 \quad / \quad x = x_1 + x_2$$

2) Familles de vecteurs

Définition I - 7 : Famille

Soit E un ensemble non vide, on considère I un ensemble (non vide), qu'on appellera ensemble d'indices.
On appelle famille d'éléments de E indexée par I toute application de I dans E.
On note le plus souvent $(x_i)_{i\in I}$ cette famille, avec pour tout $i \in I$ $x_i \in E$.

Définition I - 8 : Support d'une famille

On suppose que E est muni d'une structure admettant un élément nul (corps, espace vectoriel ...). On considère alors une famille d'éléments de E indexée par I, $(x_i)_{i\in I}$. On appelle **support** de cette famille l'ensemble $\{i \in I / x_i \neq 0\}$.

Notation :

On notera E^I l'ensemble des familles d'éléments de E et $E^{(I)}$ l'ensemble des familles de support fini d'éléments de E.

Pour la suite on considère E un $\mathbb{K}$-espace vectoriel où $\mathbb{K}$ est $\mathbb{R}$ ou $\mathbb{C}$.

Définition I - 9 :

Soit $(x_i)_{i\in I}$ une famille de vecteurs de E. On appelle **combinaison linéaire** de cette famille tout vecteur x tel que :

$$\exists\,(\lambda_i)_{i\in I} \in \mathbb{K}^{(I)} \;/\; x = \sum_{i\in I} \lambda_i x_i$$

Proposition I - 6 :

L'ensemble des combinaisons linéaires d'une partie non vide A de E est un sous espace vectoriel .
C'est le plus petit sous espace vectoriel contenant A.
C'est donc le sous espace vectoriel engendré par A.

Définition I - 10 : Famille libre

Soit $(x_i)_{i\in I}$ une famille de vecteurs de E, on dit que $(x_i)_{i\in I}$ est une **famille libre** si

$$\forall\,(\lambda_i)_{i\in I} \in \mathbb{K}^{(I)}, \sum_{i\in I} \lambda_i x_i = 0 \Rightarrow \forall i \in I, \lambda_i = 0$$

Une famille non libre est dite **liée**.

Définition I - 11 : Famille génératrice

On dit que $(x_i)_{i\in I}$ est une famille génératrice de E si

$$\forall x \in E,\; \exists\,(\lambda_i)_{i\in I} \in \mathbb{K}^{(I)} \quad / \quad x = \sum_{i\in I} \lambda_i x_i$$

C'est à dire que la famille est génératrice si et seulement si tout vecteur de E est combinaison linéaire de la famille ou encore si et seulement si $\mathrm{Vect}\,(x_i)_{i\in I} = E$

Définition I - 12 : Dimension finie

Un espace vectoriel est dit de dimension finie s'il admet une famille génératrice de cardinal fini.

Propriété I - 1 : des sur et sous familles

Toute sur famille d'une famille génératrice est génératrice.
Toute sous famille d'une famille libre est une famille libre.

Définition I - 13 : Base

- Soit $\mathcal{B}$ une famille non vide de vecteurs de E. On dit que cette famille est une base de E si elle est libre et génératrice de E.
  Une famille $(e_i)_{i\in I}$ est donc une base si et seulement si tout vecteur de E s'écrit de façon unique comme combinaison linéaire de vecteurs de la famille $\mathcal{B}$.
- Soit $\mathcal{B} = (e_i)_{i\in I}$ une base de E. Par définition, pour tout vecteur $x \in E$ il existe une unique famille $(\lambda_i)_{i\in I} \in \mathbb{K}^{(I)}$ telle que $x = \displaystyle\sum_{i\in I} \lambda_i e_i$. On appelle coordonnées de x dans la base $\mathcal{B}$ la famille $(\lambda_i)_{i\in I}$.

Théorème I - 2 :

Soit E un $\mathbb{K}$ espace vectoriel, soit $(e_i)_{i\in I}$ une famille de vecteurs de E, alors on a équivalence entre les assertions suivantes :

- $(e_i)_{i\in I}$ est une base
- $(e_i)_{i\in I}$ est une famille génératrice minimale
- $(e_i)_{i\in I}$ est une famille libre maximale

Théorème I - 3 :

Soit E un espace vectoriel de dimension finie, soit $(e_i)_{i\in I}$ une famille génératrice finie. On considère J un sous ensemble d'indice de I, tel que $(e_i)_{i\in J}$ est une famille libre. Alors il existe L tel que $J \subset L \subset I$ et $(e_i)_{i\in L}$ est une base de E.

Théorème I - 4 : de la base extraite

De toute famille génératrice on peut extraire une base.

Théorème I - 5 : de la base incomplète

Toute famille libre peut être complétée en une base.

Théorème I - 6 :

Dans un espace engendré par n vecteurs, toute famille de $n + 1$ vecteurs est liée.

Théorème I - 7 : de la dimension

Dans un espace de dimension finie il existe au moins une base.
De plus toute base de cet espace a même cardinal.

Théorème I - 8 :
En dimension n, une famille de n vecteurs est une base si et seulement si elle est libre, si et seulement si elle est génératrice.

Définition I - 14 : Rang d'une famille de vecteurs
Soit $(x_i)_{i\in[\![1,n]\!]}$ une famille de n vecteurs. On appelle rang de cette famille la dimension de l'espace vectoriel engendré par cette famille. On note ce nombre $\mathrm{rg}(x_1,\ldots,x_n)$.

Propriété I - 2 : Formule de Grassmann
Soit F et G deux sous-espaces vectoriels d'un même espace vectoriel de dimension finie.
F, G et $F+G$ sont de dimensions finies et on a

$$\dim(F+G)=\dim(F)+\dim(G)-\dim(F\cap G)$$

3) Sommes de sous espaces vectoriels (MP)

Définition I - 15 :
Soit E un $\mathbb{K}-$espace vectoriel. On considère $(E_i)_{i\in I}$ une famille finie de sous espaces vectoriels de E.
On appelle somme de ces sous espaces vectoriels l'ensemble

$$\sum_{i\in I}E_i=\left\{x\in E\quad/\quad\exists\,(x_i)_{i\in I}\in(E_i)_{i\in I}\ \text{ tel que } x=\sum_{i\in I}x_i\right\}$$

C'est aussi le plus petit sous espace vectoriel contenant tous les E_i, c'est donc $\mathrm{Vect}\left(\bigcup_{i\in I}E_i\right)$.

Propriété I - 3 : Dimension finie
Soit $(F_i)_{i[\![1,p]\!]}$ une famille finie de sous espaces vectoriels de dimensions finies de E. $\sum_{i=1}^{p}F_i$ est alors de dimension finie et

$$\dim\left(\sum_{i=1}^{p}F_i\right)\leqslant\sum_{i=1}^{p}\dim(F_i)$$

Définition I - 16 : Somme directe
Soit E un $\mathbb{K}-$espace vectoriel. On considère $(E_i)_{i\in I}$ une famille finie de sous espaces vectoriels de E.
La somme $\sum_{i\in I}E_i$ est directe si pour tout $x\in\sum_{i\in I}E_i$, il existe $(x_i)_{i\in I}\in(E_i)_{i\in I}$ tel que $x=\sum_{i\in I}x_i$ et **tel que cette écriture soit unique**.
On note alors la somme

$$\bigoplus_{i\in I}E_i$$

Proposition I - 7 : Caractérisation

La somme $\sum_{i\in I} E_i$ est directe si et seulement si

$$(x_i)_{i\in I} \in (E_i)_{i\in I} \quad \sum_{i\in I} x_i = 0 \Rightarrow \forall i \in I \; x_i = 0$$

ou encore si et seulement si

$$\forall i \in I, \quad E_i \cap \left(\sum_{j\in I\setminus\{i\}} E_j\right) = \{0\}$$

Proposition I - 8 : En dimension finie

Si E est un espace de dimension finie alors la somme est directe si et seulement si

$$\dim\left(\sum_{i\in I} E_i\right) = \sum_{i\in I} \dim(E_i)$$

Corollaire I - 1 :

Si E est de dimension finie et que la somme est directe alors on a $E = \bigoplus_{i\in I} E_i$ si et seulement si

$$\dim(E) = \sum_{i\in I} \dim(E_i)$$

Définition I - 17 : Base adaptée à une somme directe

Soit E un espace vectoriel de dimension finie, on considère un sous espace vectoriel F de E. Si $(e_i)_{i\in[\![1,p]\!]}$ est une base de F, alors toute base de E telle que les premiers vecteurs soient les $(e_i)_{i\in[\![1,p]\!]}$ est dite adaptée à F.

On généralise cette notion avec : si $E = \bigoplus_{i\in I} E_i$ et on considère une base pour chacun des sous espaces, on obtient ainsi une base de E adaptée à la famille des sous espaces.

Proposition I - 9 : Projecteurs associés

Soit $(E_i)_{i\in I}$ une famille de sous espaces vectoriels telle que $E = \bigoplus_{i\in I} E_i$. Pour $i \in I$, on considère le projecteur p_i d'image E_i et de noyau $\sum_{j\in I\setminus\{i\}} E_j$. Cette famille de projecteurs est dite associée à la somme directe et vérifie

$$\sum_{i\in I} p_i = Id_E \qquad \text{et} \qquad \forall (i,j) \in I^2 \text{ tel que } i \neq j,\; p_i \circ p_j = 0$$

Théorème I - 9 :

Soit F un $\mathbb{K}$ espace vectoriel.

Soit E un K espace vectoriel et une famille $(E_i)_{i\in I}$ finie de sous espaces vectoriels, telle que $E = \bigoplus_{i\in I} E_i$.

Pour tout $i \in I$, on considère u_i une applications linéaires de E_i dans F.

Il existe alors une application linéaire u de E dans F et une seule telle que, pour tout $i \in I$, u_i soit la restriction de u à E_i.

II Application linéaire

1) Rappels et généralisations

Définition II - 1 : Application linéaire

Soit E et F deux $\mathbb{K}$ espaces vectoriels. Une application f de E dans F est une application linéaire si c'est un morphisme d'espaces vectoriels, c'est à dire :

$$\forall (x,y) \in E^2 \quad f(x+y) = f(x) + f(y)$$

$$\forall (\lambda, x) \in \mathbb{K} \times E \quad f(\lambda x) = \lambda f(x)$$

Propriété II - 1 :

Soit E et F deux $\mathbb{K}$ espaces vectoriels. Soit f une application de E vers f.

- si f est une application linéaire alors $f(0_E) = 0_F$
- f est une application linéaire si et seulement si

  $$\forall (x,y) \in E^2 \ \forall \lambda \in \mathbb{K} \quad f(x+\lambda y) = f(x) + \lambda f(y)$$

  ou encore si et seulement si

  $$\forall (x,y) \in E^2 \ \forall (\lambda,\mu) \in \mathbb{K}^2 \quad f(\lambda x + \mu y) = \lambda f(x) + \mu f(y)$$

- l'ensemble des applications linéaires de E dans F est un $\mathbb{K}$ espace vectoriel noté $\mathscr{L}(E,F)$.

Définition II - 2 : Noyau et image

Soit $u \in \mathscr{L}(E,F)$. Noyau et image de u les sous-espaces vectoriels, respectivement de E et de F, suivant :

$$\ker(u) = u^{-1}\left(\{0_F\}\right) \qquad \operatorname{Im}(u) = u(E)$$

Théorème II - 1 :

Soit F un $\mathbb{K}$ espace vectoriel.
Soit E un K espace vectoriel et une famille $(E_i)_{i\in I}$ finie de sous espaces vectoriels, telle que $E = \bigoplus_{i\in I} E_i$.
Pour tout $i \in I$, on considère u_i une applications linéaires de E_i dans F.
Il existe alors une application linéaire u de E dans F et une seule telle que, pour tout $i \in I$, u_i soit la restriction de u à E_i.

Proposition II - 1 :

Caractérisation des propriétés des applications linéaires à l'aide de l'image d'une base.
Soient E et F deux $\mathbb{K}$ espaces vectoriels.
Soit $(e_i)_{i\in I}$ une base de E et $(f_i)_{i\in I}$ une famille de F.
Il existe une et une seule application linéaire de E dans F telle que $\forall i \in I \quad f(e_i) = f_i$.
On a de plus les propriétés suivantes :

a) f surjective si et seulement si $(f_i)_{i\in I}$ génératrice de F

b) f injective si et seulement si $(f_i)_{i\in I}$ libre

c) f bijective si et seulement si $(f_i)_{i\in I}$ base.

Théorème II - 2 :

On considère E et F deux $\mathbb{K}$ espaces vectoriels.
Soit u une application linaire de E dans F , alors u définit un isomorphisme de tout supplémentaire de $\ker(u)$ dans $\operatorname{Im}(u)$.

Corollaire II - 1 : Théorème du rang

Si E est de dimension finie alors $\operatorname{Im}(u)$ est de dimension finie. On dit alors que u est de rang fini et on pose $\operatorname{rg}(u) = \dim(\operatorname{Im}(u))$ et on a :

$$\dim(E) = \dim(\ker(u)) + \operatorname{rg}(u)$$

Proposition II - 2 : Application : interpolation de Lagrange

Soit $(x_i)_{i\in[\![0,n]\!]} \in \mathbb{K}^{n+1}$ telle que pour tout couple $(i,j) \in [\![0,n]\!]^2$, avec $i \neq j$ on a $x_i \neq x_j$.
Alors pour toute famille $(y_i)_{i\in[\![0,n]\!]} \in \mathbb{K}^{n+1}$ il existe un unique polynôme $P \in \mathbb{K}_n[X]$ tel que pour tout $i \in [\![0,n]\!]$ $P(x_i) = y_i$

Propriété II - 2 :

Soit u et v deux endomorphismes de E de rangs finis.

- $\operatorname{rg}(u \circ v) \leqslant \min(\operatorname{rg}(u), \operatorname{rg}(v))$
- si u est un isomorphisme alors $\operatorname{rg}(u \circ v) = \operatorname{rg}(v)$
- si v est un isomorphisme alors $\operatorname{rg}(u \circ v) = \operatorname{rg}(u)$.

2) Forme linéaire

Définition II - 3 : Forme linéaire

Soit E un $\mathbb{K}-$espace vectoriel. On appelle forme linéaire toute application linéaire de E dans $\mathbb{K}$.

L'ensemble des formes linéaires est un $\mathbb{K}-$espace vectoriel noté $E^* = \mathscr{L}(E, \mathbb{K})$.

Définition II - 4 : Hyperplan

Soit E un $\mathbb{K}-$espace vectoriel. H un sous-espace vectoriel est une hyperplan s'il est le noyau d'une forme linéaire non nulle.

Proposition II - 3 :

H est un hyperplan si et seulement si il existe une droite vectorielle qui lui soit supplémentaire.

Proposition II - 4 :

Soient φ et ψ deux formes linéaires non nulles sur un K espace vectoriel E. On a
$\ker(\varphi) = \ker(\psi)$ si et seulement s'il existe $k \in \mathbb{K}$ tel que $\varphi = k.\psi$

3) Dimension finie

Proposition II - 5 : Forme non nulle

— Pour tout vecteur non nul $e \in E$ il existe une forme linéaire φ telle que $\varphi(e) = 1$.
— Seul le vecteur nul est le vecteur en lequel toutes les formes linéaires s'annulent.

Proposition II - 6 : Equation d'un hyperplan

On considère E un $\mathbb{K}$ -espace vectoriel de dimension finie égale à n.
Soit F une sous espace vectoriel de E.
F est un hyperplan de E si et seulement si $\dim(F) = n - 1$.
Si $(e_i)_{i\in[\![1,n]\!]}$ est une base de E, alors pour tout hyperplan H il existe une famille $(a_i)_{i\in[\![1,n]\!]} \in \mathbb{K}^n$ telle que

$$x = \sum_{i=1}^{n} x_i.e_i \in H \Leftrightarrow \sum_{i=1}^{n} a_i.x_i = 0$$

et tout ensemble vérifiant une telle équation est un hyperplan.

Théorème II - 3 :

Si F est un sous-espace vectoriel de E de dimension p, l'ensemble des formes linéaires s'annulant sur F est un sous-espace vectoriel de E^* de dimension $n - p$.

Théorème II - 4 :

Si $\mathscr{B}^* = (\varphi_1, .., \varphi_q)$ est une famille libre de formes linéaires sur un espace vectoriel E de dimension n, l'intersection des noyaux respectifs H_i des formes linéaires φ_i est un sous-espace vectoriel F de E de dimension $n - q$. Toute forme linéaire s'annulant sur F est combinaison linéaire de $(\varphi_1, .., \varphi_q)$.

III Calcul matriciel

1) Généralités

Définition III - 1 : Matrices équivalentes

Soient A et B deux matrices de $\mathscr{M}_{n,p}(\mathbb{K})$. On dit que A et B sont équivalentes si et seulement si il existe $P \in Gl_n(\mathbb{K})$ et $Q \in Gl_p(\mathbb{K})$ telles que $B = P^{-1}AQ$.

Proposition III - 1 : Caractérisation

Toute matrice $M \in \mathscr{M}_{n,p}(\mathbb{K})$ de rang r est équivalente à la matrice $J_r = \begin{pmatrix} I_r & 0_{r,p-r} \\ 0_{n-r,r} & 0_{n-r,p-r} \end{pmatrix}$

Corollaire III - 1 :

Deux matrices de $\mathscr{M}_{n,p}(\mathbb{K})$ sont équivalentes si et seulement si elles ont même rang.

Définition III - 2 : Matrices semblables

Soient A et B deux matrices de $\mathscr{M}_n(\mathbb{K})$. On dit que A et B sont semblables si et seulement si il existe $P \in Gl_n(\mathbb{K})$ telle que $A = P^{-1}BP$.

2) Trace d'un endomorphisme

Définition III - 3 :

Soit $A = (a_{i,j})_{(i,j)\in[\![1,n]\!]^2}$ une matrice, élément de $\mathcal{M}_n(\mathbb{K})$. On appelle trace de A le nombre noté $\operatorname{tr}(A)$ ou $\operatorname{tr}(A)$ et défini par

$$\operatorname{tr}(A) = \sum_{i=1}^{n} a_{ii}$$

Proposition III - 2 :

L'application de $\mathscr{M}_n(K)$ dans $\mathbb{K}$ qui à A associe $\operatorname{tr}(A)$ est une application linéaire.

Proposition III - 3 :

Pour toutes matrices A et B de $\mathscr{M}_n(\mathbb{K})$, on a la relation

$$\operatorname{tr}(AB) = \operatorname{tr}(BA)$$

Corollaire III - 2 :

Soit $A \in \mathscr{M}_n(\mathbb{K})$ et $B \in Gl_n(\mathbb{K})$, alors $\operatorname{tr}(A) = \operatorname{tr}\left(B^{-1}AB\right)$
C'est à dire que deux matrices semblables ont même trace.

Définition III - 4 : Trace d'un endomorphisme

Soit E un espace vectoriel de dimension n, on considère $f \in \mathscr{L}(E)$, on appelle trace de f la trace des matrices de f dans n'importe quelle base.

Proposition III - 4 : Trace d'un projecteur

Soit p un projecteur de E, espace vectoriel. On a alors l'égalité suivante :

$$rg(p) = \operatorname{tr}(p)$$

3) Matrices par blocs

Définition III - 5 : Ecriture par blocs

Soit $A \in \mathscr{M}_n(\mathbb{K})$ une matrice d'ordre n. On dit que A est définie par blocs s'il existe une famille de matrices (A_{ij}) telle que A puisse s'écrire :

$$A = \begin{pmatrix} A_{1,1} & \dots & A_{1,p} \\ \vdots & A_{ij} & \vdots \\ A_{q,1} & \dots & A_{q,p} \end{pmatrix}$$

$A_{i,j}$ et $A_{i,j+1}$ ont donc même nombre de ligne.
$A_{i,j}$ et $A_{i+1,j}$ ont même nombre de colonnes.
Les matrices A_{ij} sont appelées sous matrices de A.

Propriété III - 1 : Addition

Soit A et B deux matrices d'ordre n s'écrivant par blocs de mêmes tailles : $A = \begin{pmatrix} A_{1,1} & \dots & A_{1,p} \\ \vdots & A_{ij} & \vdots \\ A_{q,1} & \dots & A_{q,p} \end{pmatrix}$ et $B = \begin{pmatrix} B_{1,1} & \dots & B_{1,p} \\ \vdots & B_{ij} & \vdots \\ B_{q,1} & \dots & B_{q,p} \end{pmatrix}$, où, pour tout $(i,j)\, [\![1,q]\!] \times [\![1,p]\!]$, $A_{i,j}$ et $B_{i,j}$ ont même taille. On a alors

$$A + B = \begin{pmatrix} A_{1,1} + B_{1,1} & \dots & A_{1,p} + B_{1,p} \\ \vdots & A_{ij} + B_{ij} & \vdots \\ A_{q,1} + B_{q,1} & \dots & A_{q,p} + B_{q,p} \end{pmatrix}$$

Propriété III - 2 : Multiplication par blocs

Soit A et B deux matrices d'ordre n s'écrivant par blocs : $A = \begin{pmatrix} A_{1,1} & \dots & A_{1,p} \\ \vdots & A_{ij} & \vdots \\ A_{q,1} & \dots & A_{q,p} \end{pmatrix}$ et $B = \begin{pmatrix} B_{1,1} & \dots & B_{1,r} \\ \vdots & B_{ij} & \vdots \\ B_{p,1} & \dots & B_{p,r} \end{pmatrix}$, où, pour tout $(i,j,k)\, [\![1,q]\!] \times [\![1,p]\!] \times [\![1,r]\!]$, le nombre de colonnes de $A_{i,j}$ est le même que le nombre de ligne que $B_{j,k}$. On a alors : le nombre de colonnes de A est le même que le nombre de ligne que B et

$$AB = \begin{pmatrix} & \dots & \\ \vdots & \sum_{k=1}^{p} A_{ik}B_{kj} & \vdots \\ & \dots & \end{pmatrix}$$

Propriété III - 3 : Transposée

Soit A une matrice d'ordre n écrite par blocs : $A = \begin{pmatrix} A_{1,1} & \dots & A_{1,p} \\ \vdots & A_{ij} & \vdots \\ A_{q,1} & \dots & A_{q,p} \end{pmatrix}$.

La matrice $A^\top$ s'écrit alors

$$A^\top = \begin{pmatrix} A_{1,1}^\top & \dots & A_{q,1}^\top \\ \vdots & A_{ji}^\top & \vdots \\ A_{1,p} & \dots & A_{q,p}^\top \end{pmatrix}$$

IV Sous-espaces affines d'un espace vectoriel

1) Translations

On considère E un $\mathbb{K}$ espace vectoriel.

Définition IV - 1 : Translation

On appelle translation de vecteur a toute application, notée t_a, de E dans E définie par :

$$\forall x \in E, \quad t_a(x) = a + x$$

Notation :
L'image d'une partie Ω de E par une translation t_a est alors notée : $a+\Omega$

Remarque :
Lorsque Ω est un sous espace vectoriel de E, $a+\Omega$ n'est pas forcément un espace vectoriel.

Notation :
On note $\Im(E)$ l'ensemble des translations de E

Proposition IV - 1 : Structure
$(\Im(E), \circ)$ est un groupe abélien isomorphe à $(E,+)$

Démonstration : Montrons que c'est un groupe : soit t_a et t_b deux translations de E, alors

$$\forall x \in E, t_a \circ t_b(x) = t_a(t_b(x)) = a+b+x = t_{a+b}(x)$$

donc $t_a \circ t_b$ est bien une translation et donc la composition est une loi de composition interne. De plus on a :

$$\forall x \in E, t_0 \circ t_a(x) = a+x = t_a(x) = t_a \circ t_0(x)$$

donc t_0 est un élément neutre pour cette loi,

$$\forall x \in E, t_a \circ (t_b \circ t_c)(x) = a+b+c+x = (t_a \circ t_b) \circ t_c(x)$$

la loi est donc associative, et

$$\forall x \in E, t_a \circ t_{-a}(x) = x = t_{-a} \circ t_a(x) = t_0$$

donc tout élément est symétrisable. Conclusion : $(\Im(E), \circ)$ est un groupe, de plus

$$\forall x \in E, t_a \circ t_b(x) = t_b \circ t_a(x)$$

c'est donc un groupe commutatif.
On considère maintenant l'application qui à $a \in E$ associe t_a, cette application est un morphisme de groupe, en effet d'après les calculs précédents on a :

$$\forall x \in E, t_a \circ t_b(x) = t_{a+b}(x)$$

Elle est surjective par définition des translations et de façon immédiate injective.
Conclusion : c'est un ismorphisme de groupe.

2) Sous espaces affines

a) Généralités

Définition IV - 2 : Sous-espace affine
Une partie A de E est un **sous espace affine** de E si **A est vide** ou si il existe $a \in E$ et un sous espace vectoriel F tel que $\boxed{A = a+F}$

Proposition IV - 2 :
Soit $a \in E$ et F un sous espace vectoriel de E, alors on a $a+F=F$ si et seulement si $a \in F$

Proposition IV - 3 :
$a+F \subset b+G$ si et seulement si $F \subset G$ et $b-a \in G$

Corollaire IV - 1 :
$b+F=a+F$ si et seulement si $b \in a+F$

Corollaire IV - 2 :
$0_E \in a+F$ si et seulement si $a+F$ est un sous espace vectoriel

Corollaire IV - 3 : Postulat d'Euclide
$a+F=a+G \Leftrightarrow F=G$

Définition IV - 3 : Direction d'un sous espace affine
Soit $\mathcal{A}=a+F$ un sous espace affine de E, alors on appelle F **la direction** de $\mathcal{A}$.
On note souvent $F=\overrightarrow{\mathcal{A}}$

Définition IV - 4 : Parallélisme
Soient $a+F$ et $b+G$ deux sous espaces affines de E, on dit que
— $a+F$ est parallèle à $b+G$ si $F \subset G$
— $a+F$ et $b+G$ sont parallèles si $F=G$

Proposition IV - 4 : Equations linéaires
Si f est un élément de $\mathscr{L}(E,F)$, l'ensemble des solutions de l'équation $f(x)=a$ d'inconnue x est soit l'ensemble vide, soit un sous-espace affine dirigé par $\ker(f)$.
Autrement dit, lorsque l'ensemble des solutions est non vide, il est de la forme $x_0+\ker(f)$, où x_0 est une solution particulière.

b) Hyperplans affines

Définition IV - 5 : Hyperplan affine
Soit E un espace vectoriel de dimension finie égale à n.
On appelle hyperplan affine de E toute partie non vide de E de la forme : $\mathcal{A}=u+F$ où $u \in E$ et F est un hyperplan vectoriel de E, c'est à dire un sous-espace vectoriel de dimension $n-1$ ou le noyau d'une forme linéaire non nulle.

3) Intersections de sous espaces affines

Proposition IV - 5 :
Soit A et B deux sous espaces affines de E, de directions respactives F et G, soient a et b deux points de E respectivements de A et B. Alors on a

$$A \cap B \neq \emptyset \Leftrightarrow (a-b) \in F+G$$

De plus, si $A \cap B \neq \emptyset$, alors $A \cap B$ est un sous espace affine de direction $F \cap G$

Proposition IV - 6 :
Soient A et B deux sous espaces affines, si A est parallèle à B alors $A \cap B = \emptyset$ ou $A \subset B$

Proposition IV - 7 : Systèmes linéaires
L'ensemble des solutions d'un système de p équations à n inconnues est un sous espace affine de $\mathbb{R}^n$ dont la direction, s'il est non vide, est un sous-espace vectoriel de dimension au moins $n-p$.

V Déterminant

1) Déterminant de n vecteurs

Définition V - 1 : Forme n-linéaire
On appelle forme n-linéaire une application de E^n dans $\mathbb{K}$ telle que : si φ est cette application , pour tout $(x_i)_{i\in[\![1,n]\!]} \in E^n$ et tout $j \in [\![1,n]\!]$

$$\varphi\left(x_1, x_2, \ldots, x_{j-1}, \cdot, x_{j+1}, \ldots, x_n\right) : \begin{array}{ccc} E & \to & \mathbb{K} \\ y & \mapsto & \varphi\left(x_1, x_2, \ldots, x_{j-1}, y, x_{j+1}, \ldots, x_n\right) \end{array}$$

est linéaire

Définition V - 2 :
Une application est dite

- antisymétrique si, pour tout $(x_i)_{i\in[\![1,n]\!]} \in E^n$

$$\varphi\left(x_1, x_2, \ldots, x_i, .., x_{j-1}, x_j, x_{j+1}, \ldots, x_n\right) = -\varphi\left(x_1, x_2, .., x_j, \ldots, x_{j-1}, x_i, x_{j+1}, \ldots, x_n\right)$$

- alternée si, pour tout $(x_i)_{i\in[\![1,n]\!]} \in E^n$ tel qu'il existe $(i_1, i_2) \in [\![1,n]\!]$ $i_1 \neq i_2$ et $x_{i_1} = x_{i_2}$

$$\varphi\left(x_1, x_2, .., x_n\right) = 0$$

Proposition V - 1 :
Une forme n-linéaire est antisymétrique si et seulement si elle est alternée.

Théorème V - 1 : Déterminant
Soit E un espace vectoriel de dimension n. Soit $\mathcal{B} = (e_i)_{i\in[1,n]}$ une base de E.
Il exsite une et une seule forme n-linéaire alternée φ telle que

$$\varphi\left(e_1, e_2, \ldots, e_n\right) = 1$$

Cette forme est appelée déterminant dans la base $\mathcal{B}$ et on la note $\det_{\mathcal{B}}$

Théorème V - 2 :
Soit E un espace vectoriel de dimension n. L'ensemble des formes n-linéaires alternées est un espace vectoriel de dimension 1 .

Proposition V - 2 :
Soient $\mathcal{B}$ et $\mathcal{B}'$ deux bases de E, alors on a les relations suivantes

$$\det_{\mathcal{B}'} = \det_{\mathcal{B}'}(\mathcal{B}) . \det_{\mathcal{B}}$$

$$\det_{\mathcal{B}'}(\mathcal{B}) . \det_{\mathcal{B}}(\mathcal{B}') = 1$$

Proposition V - 3 :
Soit $\mathcal{B}$ une base de E et $\mathcal{V} = (v_1, v_2, \ldots, v_n)$ une famille de n vecteurs de E.
$\mathcal{V}$ est une base de E si et seulement si $\det_{\mathcal{B}}(\mathcal{V}) \neq 0$.

Proposition V - 4 : Equation d'un hyperplan défini par $n-1$ vecteurs
soit $H = vect(v_1, v_2, .., v_{n-1})$ un hyperplan de E. On a

$$x \in H \Leftrightarrow \det_{\mathcal{B}}(v_1, v_2, .., v_{n-1}, x) = 0$$

2) Déterminant d'un endomorphisme

Théorème V - 3 :
Soit $f \in \mathscr{L}(E)$ et $\mathcal{B} = (e_i)_{i\in[\![1,n]\!]}$ une base de E, le nombre $\det_{\mathcal{B}}(f(e_1), f(e_2), \ldots, f(e_n))$ est indépendant de la base choisie.
Il est appelé déterminant de f et noté $\det(f)$.

Proposition V - 5 : Composée d'endomorphisme :
soient f et g deux endomorphismes de E, on a l'égalité suivante :

$$\det(f \circ g) = \det(f)\det(g)$$

Proposition V - 6 : Caractérisation des automorphismes
$f \in \mathscr{L}(E)$ est un automorphisme de E si et seulement si $\det(f) \neq 0$

3) Déterminant d'une matrice carrée

Définition V - 3 :
Soit $A = (a_{ij}) \in \mathscr{M}_n(\mathbb{K})$, cette matrice est caniniquement associée (matrice dans la base canonique) à un endomorphisme f de $\mathbb{K}^n$. On appelle déterminant de A, $\det(f)$. Ce déterminant est aussi, par définition, le déterminant des vecteurs colonnes de la matrices, dans la base canonique.
On le note $\det(A)$ ou encore

$$\det(A) = \begin{vmatrix} a_{11} & \cdots & a_{1n} \\ \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix}$$

Proposition V - 7 :

$$\forall A \in \mathscr{M}_n(\mathbb{K}) \qquad \forall \lambda \in \mathbb{K} \qquad \det(\lambda A) = \lambda^n \det(A)$$

Proposition V - 8 :
Pour toutes matrices A et B carrées d'ordre n

$$\det(AB) = \det(A)\det(B)$$

Proposition V - 9 :
$A \in \mathscr{M}_n(\mathbb{K})$ est inversible si et seulement si $\det(A) \neq 0$.
De plus si A est inversible alors

$$\det\left(A^{-1}\right) = \frac{1}{\det(A)}$$

Proposition V - 10 :
Soit A une matrice carrée, on a

$$\det(A) = \det\left(A^\top\right)$$

4) Méthodes de calculs

Proposition V - 11 : Formule
Soit $A = (a_{ij}$ une matrice carrée d'ordre n.
On a

$$\det(A) = \sum_{\sigma \in S_n} \varepsilon(\sigma) \prod_{i=1}^{n} a_{i\sigma(i)}$$

En appelant A_{ij} la matrice obtenue par A en enlevant la $i^{ième}$ ligne et la $j^{ième}$ colonne,

— développée suivant la $j^{ième}$ colonne

$$\det(A) = \sum_{k=1}^{n} (-1)^{k+j} a_{kj} \det(A_{kj})$$

— développée suivant la $i^{ième}$ ligne

$$\det(A) = \sum_{k=1}^{n} (-1)^{k+i} a_{ik} \det(A_{ik})$$

Définition V - 4 : Cofacteur
Le terme $(-1)^{i+j} \det(A_{ij})$ est appelé cofacteur du terme (i,j). ($\det(A_{ij})$ est le mineur du coefficient).

Définition V - 5 : Comatrice
Soit $A \in \mathscr{M}_n(\mathbb{K})$, avec les notations précédentes, on appelle comatrice de A, la matrice des cofacteurs de A et la note $\mathrm{Com}(A)$.

Propriété V - 1 :

Pour toute matrice A on a :

$$A\,\mathrm{Com}(A)^\top = \mathrm{Com}(A)^\top A = \det(A) I_n$$

5) Déterminant par blocs

Proposition V - 12 : Déterminant par blocs

Soit $A \in \mathscr{M}_p(\mathbb{K})$, $C \in \mathscr{M}_q$ et $B \in \mathscr{M}_{p,q}(\mathbb{K})$.
On a

$$\det \begin{pmatrix} A & B \\ 0 & C \end{pmatrix} = \det(A)\det(C)$$

Proposition V - 13 : Généralisation

Soit A une matrice triangulaire par blocs : $A = \begin{pmatrix} A_1 & & & & \\ 0 & \ddots & & & \\ \vdots & & A_i & & \\ \vdots & (0) & & \ddots & \\ 0 & \dots & \dots & 0 & A_p \end{pmatrix}$.

On a

$$\det(A) = \prod_{i=1}^{p} \det(A_i)$$

Définition V - 6 : Transvections par blocs

On appelle transvection par blocs une opération transformant une matrice par blocs $\begin{pmatrix} A & B \end{pmatrix}$ en une matrice de la forme $\begin{pmatrix} A & B + \lambda A \end{pmatrix}$ (à la condition que A et B ont le même nombre de colonnes) ou une matrice par blocs $\begin{pmatrix} A \\ B \end{pmatrix}$ en une matrice $\begin{pmatrix} A \\ B + \lambda A \end{pmatrix}$ (à la condition que A et B ont le même nombre de lignes).

Propriété V - 2 :

Le déterminant d'une matrice carrée est invariant par transvection par blocs.