

# Rappel d'algèbre linéaire et compléments

MP Lycée Clemenceau

## Table des matières

<b>I</b>	<b>Notions générales</b>	<b>2</b>
1)	Généralités . . . . .	2
a)	Définitions . . . . .	2
b)	Sous espaces vectoriels . . . . .	2
2)	Familles de vecteurs . . . . .	4
3)	Sommes de sous espaces vectoriels (MP) . . . . .	6
<b>II</b>	<b>Application linéaire</b>	<b>8</b>
1)	Rappels et généralisations . . . . .	8
2)	Forme linéaire . . . . .	9
3)	Dimension finie . . . . .	10
<b>III</b>	<b>Calcul matriciel</b>	<b>10</b>
1)	Généralités . . . . .	10
2)	Trace d'un endomorphisme . . . . .	11
3)	Matrices par blocs . . . . .	11
<b>IV</b>	<b>Sous-espaces affines d'un espace vectoriel</b>	<b>12</b>
1)	Translations . . . . .	12
2)	Sous espaces affines . . . . .	13
a)	Généralités . . . . .	13
b)	Hyperplans affines . . . . .	14
3)	Intersections de sous espaces affines . . . . .	14
<b>V</b>	<b>Déterminant</b>	<b>15</b>
1)	Déterminant de n vecteurs . . . . .	15
2)	Déterminant d'un endomorphisme . . . . .	16
3)	Déterminant d'une matrice carrée . . . . .	16
4)	Méthodes de calculs . . . . .	17
5)	Déterminant par blocs . . . . .	18

# I Notions générales

## 1) Généralités

### a) Définitions

Dans tout le chapitre  $\mathbb{K}$  désignera un corps commutatif égal à  $\mathbb{R}$  ou  $\mathbb{C}$ . Cependant les notions peuvent être aussi définies avec un corps quelconque.

#### Définition I - 1 : Espace vectoriel

Soit  $\mathbb{K}$  un corps commutatif, on dit que  $E$  est un **espace vectoriel sur  $\mathbb{K}$**  (ou  $\mathbb{K}$ -espace vectoriel) si  $E$  est un groupe abélien et si  $E$  est muni d'une loi de composition externe à opérateurs dans  $\mathbb{K}$ , ayant les propriétés suivantes :

$$\left\{ \begin{array}{l} \mathbb{K} \times E \rightarrow E \\ (\lambda, x) \mapsto \lambda.x \end{array} \right. \text{ telle que}$$

$$\begin{aligned} \forall (\lambda, \mu, x) \in \mathbb{K}^2 \times E & \quad (\lambda + \mu).x = \lambda.x + \mu.x \\ \forall (\lambda, x, y) \in \mathbb{K} \times E^2 & \quad \lambda.(x + y) = \lambda.x + \lambda.y \\ \forall (\lambda, \mu, x) \in \mathbb{K}^2 \times E & \quad \lambda.(\mu.x) = (\lambda.\mu)x = \mu.(\lambda.x) \\ \forall x \in E & \quad 1_{\mathbb{K}}.x = x \end{aligned}$$

#### Proposition I - 1 : Règles de calculs

Soit  $E$  un  $\mathbb{K}$ -espace vectoriel, on a alors :

$$\begin{aligned} \forall x \in E, \quad 0_{\mathbb{K}}.x &= 0_E \\ \forall \alpha \in \mathbb{K}, \quad \alpha.0_E &= 0_E \\ \alpha.x = 0_E &\Leftrightarrow \alpha = 0 \text{ ou } x = 0_E \\ \forall x \in E, \quad (-1).x &= -x \text{ et } (-\alpha).x = \alpha.(-x) = -\alpha.x \end{aligned}$$

#### Définition I - 2 : Produit d'un nombre fini de $\mathbb{K}$ -espaces vectoriels

Soit  $n$  un entier non nul. Soit  $(E_i)_{i \in [1, n]}$  une famille de  $n$   $\mathbb{K}$ -espaces vectoriels. On appelle espace vectoriel produit de ces espaces l'ensemble  $E = E_1 \times E_2 \times \dots \times E_n$  muni des lois suivantes :

$$\begin{aligned} \forall ((x_1, \dots, x_n), (y_1, \dots, y_n)) \in E^2 & \quad (x_1, \dots, x_n) + (y_1, \dots, y_n) = (x_1 + y_1, \dots, x_n + y_n) \\ \forall (x_1, \dots, x_n) \in E, \forall \lambda \in \mathbb{K} & \quad \lambda.(x_1, \dots, x_n) = (\lambda x_1, \dots, \lambda x_n) \end{aligned}$$

$E$  muni de ces deux lois est bien un  $\mathbb{K}$ -espace vectoriel.

### b) Sous espaces vectoriels

#### Définition I - 3 : Sous espace vectoriel

Soit  $E$  un  $\mathbb{K}$ -espace vectoriel, soit  $G$  une partie de  $E$ ,  $G$  est un sous espace vectoriel si :  $G \neq \emptyset$ ,  $G$  est stable pour l'addition et la multiplication externe :

$$\forall (x, y) \in G^2, \forall \lambda \in \mathbb{K} \quad x + y \in G \quad \text{et} \quad \lambda.x \in G$$

**Théorème I - 1 :**

Soit  $E$  un  $\mathbb{K}$ -espace vectoriel et  $G$  un sous espace vectoriel de  $E$ , alors  $G$  munis des lois induites de  $E$  est un espace vectoriel.

**Proposition I - 2 : Caractérisation des sous espaces vectoriels**

Soit  $E$  un  $\mathbb{K}$ -espace vectoriel et  $G$  une partie non vide de  $E$ ,  $G$  est un sous espace vectoriel de  $E$  si et seulement si

$$\forall (x, y) \in G^2, \forall (\lambda, \mu) \in \mathbb{K}^2 \quad \lambda.x + \mu.y \in G$$

ou encore

$$\forall (x, y) \in G^2, \forall \lambda \in \mathbb{K} \quad \lambda.x + y \in G$$

**Proposition I - 3 : Intersection**

L'intersection d'une famille non vide de sous espaces vectoriels est un sous espace vectoriel

**Définition I - 4 : Sous espace engendré par A**

Soit  $A$  une partie de  $E$  non vide, l'intersection de tous les sous espaces vectoriels de  $E$  contenant  $A$  est un sous espace vectoriel (d'après la proposition précédente). C'est le plus petit sous espace vectoriel pour l'inclusion contenant  $A$ . On l'appelle sous espace vectoriel engendré par  $A$  et on le note  $Vect(A)$ .

**Définition I - 5 : Somme**

On définit la somme de deux sous espaces vectoriels par : soient  $F_1$  et  $F_2$  deux sous espaces vectoriels d'un espace vectoriel  $E$ , on a alors

$$F_1 + F_2 = \{x \in E / \exists (x_1, x_2) \in F_1 \times F_2, x = x_1 + x_2\}$$

**Proposition I - 4 :**

Soient  $F_1$  et  $F_2$  deux sous espaces vectoriels de  $E$ , on a alors les deux propriétés suivantes :

- 1)  $F_1 + F_2$  est un sous espace vectoriel de  $E$
- 2)  $F_1 + F_2$  est le sous espace vectoriel engendré par  $F_1 \cup F_2$

**Définition I - 6 : Supplémentaires**

Soient  $F_1$  et  $F_2$  deux sous espaces vectoriels de  $E$ , on dit que  $F_1$  et  $F_2$  sont **supplémentaires** si ils vérifient

$$F_1 + F_2 = E \quad \text{et} \quad F_1 \cap F_2 = \{0\}$$

On note alors  $F_1 \oplus F_2 = E$

**Proposition I - 5 :**

soient  $F_1$  et  $F_2$  deux sous espaces supplémentaires de  $E$ , alors on a

$$\forall x \in E, \exists! (x_1, x_2) \in F_1 \times F_2 \quad / \quad x = x_1 + x_2$$

## 2) Familles de vecteurs

### Définition I - 7 : Famille

Soit  $E$  un ensemble non vide, on considère  $I$  un ensemble (non vide), qu'on appellera ensemble d'indices. On appelle famille d'éléments de  $E$  indexée par  $I$  toute application de  $I$  dans  $E$ . On note le plus souvent  $(x_i)_{i \in I}$  cette famille, avec pour tout  $i \in I$   $x_i \in E$ .

### Définition I - 8 : Support d'une famille

On suppose que  $E$  est muni d'une structure admettant un élément nul (corps, espace vectoriel ...). On considère alors une famille d'éléments de  $E$  indexée par  $I$ ,  $(x_i)_{i \in I}$ . On appelle **support** de cette famille l'ensemble  $\{i \in I / x_i \neq 0\}$ .

### Notation :

On notera  $E^I$  l'ensemble des familles d'éléments de  $E$  et  $E^{(I)}$  l'ensemble des familles de support fini d'éléments de  $E$ .

Pour la suite on considère  $E$  un  $\mathbb{K}$ -espace vectoriel où  $\mathbb{K}$  est  $\mathbb{R}$  ou  $\mathbb{C}$ .

### Définition I - 9 :

Soit  $(x_i)_{i \in I}$  une famille de vecteurs de  $E$ . On appelle **combinaison linéaire** de cette famille tout vecteur  $x$  tel que :

$$\exists (\lambda_i)_{i \in I} \in \mathbb{K}^{(I)} / x = \sum_{i \in I} \lambda_i x_i$$

### Proposition I - 6 :

L'ensemble des combinaisons linéaires d'une partie non vide  $A$  de  $E$  est un sous espace vectoriel. C'est le plus petit sous espace vectoriel contenant  $A$ . C'est donc le sous espace vectoriel engendré par  $A$ .

### Définition I - 10 : Famille libre

Soit  $(x_i)_{i \in I}$  une famille de vecteurs de  $E$ , on dit que  $(x_i)_{i \in I}$  est une **famille libre** si

$$\forall (\lambda_i)_{i \in I} \in \mathbb{K}^{(I)}, \sum_{i \in I} \lambda_i x_i = 0 \Rightarrow \forall i \in I, \lambda_i = 0$$

Une famille non libre est dite **liée**.

### Définition I - 11 : Famille génératrice

On dit que  $(x_i)_{i \in I}$  est une famille génératrice de  $E$  si

$$\forall x \in E, \exists (\lambda_i)_{i \in I} \in \mathbb{K}^{(I)} / x = \sum_{i \in I} \lambda_i x_i$$

C'est à dire que la famille est génératrice si et seulement si tout vecteur de  $E$  est combinaison linéaire de la famille ou encore si et seulement si  $\text{Vect}(x_i)_{i \in I} = E$

**Définition I - 12 : Dimension finie**

Un espace vectoriel est dit de dimension finie s'il admet une famille génératrice de cardinal fini.

**Propriété I - 1 : des sur et sous familles**

Toute sur famille d'une famille génératrice est génératrice.

Toute sous famille d'une famille libre est une famille libre.

**Définition I - 13 : Base**

- Soit  $\mathcal{B}$  une famille non vide de vecteurs de  $E$ . On dit que cette famille est une base de  $E$  si elle est libre et génératrice de  $E$ .

Une famille  $(e_i)_{i \in I}$  est donc une base si et seulement si tout vecteur de  $E$  s'écrit de façon unique comme combinaison linéaire de vecteurs de la famille  $\mathcal{B}$ .

- Soit  $\mathcal{B} = (e_i)_{i \in I}$  une base de  $E$ . Par définition, pour tout vecteur  $x \in E$  il existe une unique famille  $(\lambda_i)_{i \in I} \in \mathbb{K}^{(I)}$  telle que  $x = \sum_{i \in I} \lambda_i e_i$ . On appelle coordonnées de  $x$  dans la base  $\mathcal{B}$  la famille  $(\lambda_i)_{i \in I}$ .

**Théorème I - 2 :**

Soit  $E$  un  $\mathbb{K}$  espace vectoriel, soit  $(e_i)_{i \in I}$  une famille de vecteurs de  $E$ , alors on a équivalence entre les assertions suivantes :

- $(e_i)_{i \in I}$  est une base
- $(e_i)_{i \in I}$  est une famille génératrice minimale
- $(e_i)_{i \in I}$  est une famille libre maximale

**Théorème I - 3 :**

Soit  $E$  un espace vectoriel de dimension finie, soit  $(e_i)_{i \in I}$  une famille génératrice finie. On considère  $J$  un sous ensemble d'indice de  $I$ , tel que  $(e_i)_{i \in J}$  est une famille libre. Alors il existe  $L$  tel que  $J \subset L \subset I$  et  $(e_i)_{i \in L}$  est une base de  $E$ .

**Théorème I - 4 : de la base extraite**

De toute famille génératrice on peut extraire une base.

**Théorème I - 5 : de la base incomplète**

Toute famille libre peut être complétée en une base.

**Théorème I - 6 :**

Dans un espace engendré par  $n$  vecteurs, toute famille de  $n + 1$  vecteurs est liée.

**Théorème I - 7 : de la dimension**

Dans un espace de dimension finie il existe au moins une base.

De plus toute base de cet espace a même cardinal.

**Théorème I - 8 :**

En dimension  $n$ , une famille de  $n$  vecteurs est une base si et seulement si elle est libre, si et seulement si elle est génératrice.

**Définition I - 14 : Rang d'une famille de vecteurs**

Soit  $(x_i)_{i \in [1, n]}$  une famille de  $n$  vecteurs. On appelle rang de cette famille la dimension de l'espace vectoriel engendré par cette famille. On note ce nombre  $\text{rg}(x_1, \dots, x_n)$ .

**Propriété I - 2 : Formule de Grassmann**

Soit  $F$  et  $G$  deux sous-espaces vectoriels d'un même espace vectoriel de dimension finie.  $F$ ,  $G$  et  $F + G$  sont de dimensions finies et on a

$$\dim(F + G) = \dim(F) + \dim(G) - \dim(F \cap G)$$

**3) Sommes de sous espaces vectoriels (MP)****Définition I - 15 :**

Soit  $E$  un  $\mathbb{K}$ -espace vectoriel. On considère  $(E_i)_{i \in I}$  une famille finie de sous espaces vectoriels de  $E$ . On appelle somme de ces sous espaces vectoriels l'ensemble

$$\sum_{i \in I} E_i = \left\{ x \in E \mid \exists (x_i)_{i \in I} \in (E_i)_{i \in I} \text{ tel que } x = \sum_{i \in I} x_i \right\}$$

C'est aussi le plus petit sous espace vectoriel contenant tous les  $E_i$ , c'est donc  $\text{Vect} \left( \bigcup_{i \in I} E_i \right)$ .

**Propriété I - 3 : Dimension finie**

Soit  $(F_i)_{i \in [1, p]}$  une famille finie de sous espaces vectoriels de dimensions finies de  $E$ .  $\sum_{i=1}^p F_i$  est alors de dimension finie et

$$\dim \left( \sum_{i=1}^p F_i \right) \leq \sum_{i=1}^p \dim(F_i)$$

**Définition I - 16 : Somme directe**

Soit  $E$  un  $\mathbb{K}$ -espace vectoriel. On considère  $(E_i)_{i \in I}$  une famille finie de sous espaces vectoriels de  $E$ .

La somme  $\sum_{i \in I} E_i$  est directe si pour tout  $x \in \sum_{i \in I} E_i$ , il existe  $(x_i)_{i \in I} \in (E_i)_{i \in I}$  tel que  $x = \sum_{i \in I} x_i$  et tel

**que cette écriture soit unique.**

On note alors la somme

$$\bigoplus_{i \in I} E_i$$

**Proposition I - 7 : Caractérisation**

La somme  $\sum_{i \in I} E_i$  est directe si et seulement si

$$(x_i)_{i \in I} \in (E_i)_{i \in I} \quad \sum_{i \in I} x_i = 0 \Rightarrow \forall i \in I \quad x_i = 0$$

ou encore si et seulement si

$$\forall i \in I, \quad E_i \cap \left( \sum_{j \in I \setminus \{i\}} E_j \right) = \{0\}$$

**Proposition I - 8 : En dimension finie**

Si  $E$  est un espace de dimension finie alors la somme est directe si et seulement si

$$\dim \left( \sum_{i \in I} E_i \right) = \sum_{i \in I} \dim (E_i)$$

**Corollaire I - 1 :**

Si  $E$  est de dimension finie et que la somme est directe alors on a  $E = \bigoplus_{i \in I} E_i$  si et seulement si

$$\dim (E) = \sum_{i \in I} \dim (E_i)$$

**Définition I - 17 : Base adaptée à une somme directe**

Soit  $E$  un espace vectoriel de dimension finie, on considère un sous espace vectoriel  $F$  de  $E$ . Si  $(e_i)_{i \in [1,p]}$  est une base de  $F$ , alors toute base de  $E$  telle que les premiers vecteurs soient les  $(e_i)_{i \in [1,p]}$  est dite adaptée à  $F$ .

On généralise cette notion avec : si  $E = \bigoplus_{i \in I} E_i$  et on considère une base pour chacun des sous espaces, on obtient ainsi une base de  $E$  adaptée à la famille des sous espaces.

**Proposition I - 9 : Projecteurs associés**

Soit  $(E_i)_{i \in I}$  une famille de sous espaces vectoriels telle que

$E = \bigoplus_{i \in I} E_i$ . Pour  $i \in I$ , on considère le projecteur  $p_i$  d'image  $E_i$  et de noyau  $\sum_{j \in I \setminus \{i\}} E_j$ . Cette famille

de projecteurs est dite associée à la somme directe et vérifie

$$\sum_{i \in I} p_i = Id_E \quad \text{et} \quad \forall (i, j) \in I^2 \text{ tel que } i \neq j, \quad p_i \circ p_j = 0$$

**Théorème I - 9 :**

Soit  $F$  un  $\mathbb{K}$  espace vectoriel.

Soit  $E$  un  $K$  espace vectoriel et une famille  $(E_i)_{i \in I}$  finie de sous espaces vectoriels, telle que  $E = \bigoplus_{i \in I} E_i$ .

Pour tout  $i \in I$ , on considère  $u_i$  une applications linéaires de  $E_i$  dans  $F$ .

Il existe alors une application linéaire  $u$  de  $E$  dans  $F$  et une seule telle que, pour tout  $i \in I$ ,  $u_i$  soit la restriction de  $u$  à  $E_i$ .

## II Application linéaire

### 1) Rappels et généralisations

#### Définition II - 1 : Application linéaire

Soit  $E$  et  $F$  deux  $\mathbb{K}$  espaces vectoriels. Une application  $f$  de  $E$  dans  $F$  est une application linéaire si c'est un morphisme d'espaces vectoriels, c'est à dire :

$$\forall (x, y) \in E^2 \quad f(x + y) = f(x) + f(y)$$

$$\forall (\lambda, x) \in \mathbb{K} \times E \quad f(\lambda x) = \lambda f(x)$$

#### Propriété II - 1 :

Soit  $E$  et  $F$  deux  $\mathbb{K}$  espaces vectoriels. Soit  $f$  une application de  $E$  vers  $F$ .

- si  $f$  est une application linéaire alors  $f(0_E) = 0_F$
- $f$  est une application linéaire si et seulement si

$$\forall (x, y) \in E^2 \quad \forall \lambda \in \mathbb{K} \quad f(x + \lambda y) = f(x) + \lambda f(y)$$

ou encore si et seulement si

$$\forall (x, y) \in E^2 \quad \forall (\lambda, \mu) \in \mathbb{K}^2 \quad f(\lambda x + \mu y) = \lambda f(x) + \mu f(y)$$

- l'ensemble des applications linéaires de  $E$  dans  $F$  est un  $\mathbb{K}$  espace vectoriel noté  $\mathcal{L}(E, F)$ .

#### Définition II - 2 : Noyau et image

Soit  $u \in \mathcal{L}(E, F)$ . Noyau et image de  $u$  les sous-espaces vectoriels, respectivement de  $E$  et de  $F$ , suivant :

$$\ker(u) = u^{-1}(\{0_F\}) \quad \text{Im}(u) = u(E)$$

#### Théorème II - 1 :

Soit  $F$  un  $\mathbb{K}$  espace vectoriel.

Soit  $E$  un  $\mathbb{K}$  espace vectoriel et une famille  $(E_i)_{i \in I}$  finie de sous espaces vectoriels, telle que  $E = \bigoplus_{i \in I} E_i$ .

Pour tout  $i \in I$ , on considère  $u_i$  une applications linéaires de  $E_i$  dans  $F$ .

Il existe alors une application linéaire  $u$  de  $E$  dans  $F$  et une seule telle que, pour tout  $i \in I$ ,  $u_i$  soit la restriction de  $u$  à  $E_i$ .

#### Proposition II - 1 :

Caractérisation des propriétés des applications linéaires à l'aide de l'image d'une base.

Soient  $E$  et  $F$  deux  $\mathbb{K}$  espaces vectoriels.

Soit  $(e_i)_{i \in I}$  une base de  $E$  et  $(f_i)_{i \in I}$  une famille de  $F$ .

Il existe une et une seule application linéaire de  $E$  dans  $F$  telle que  $\forall i \in I \quad f(e_i) = f_i$ .

On a de plus les propriétés suivantes :

- a)  $f$  surjective si et seulement si  $(f_i)_{i \in I}$  génératrice de  $F$
- b)  $f$  injective si et seulement si  $(f_i)_{i \in I}$  libre
- c)  $f$  bijective si et seulement si  $(f_i)_{i \in I}$  base.



**Théorème II - 2 :**

On considère  $E$  et  $F$  deux  $\mathbb{K}$  espaces vectoriels.

Soit  $u$  une application linéaire de  $E$  dans  $F$ , alors  $u$  définit un isomorphisme de tout supplémentaire de  $\ker(u)$  dans  $\text{Im}(u)$ .

**Corollaire II - 1 : Théorème du rang**

Si  $E$  est de dimension finie alors  $\text{Im}(u)$  est de dimension finie. On dit alors que  $u$  est de rang fini et on pose  $\text{rg}(u) = \dim(\text{Im}(u))$  et on a :

$$\dim(E) = \dim(\ker(u)) + \text{rg}(u)$$

**Proposition II - 2 : Application : interpolation de Lagrange**

Soit  $(x_i)_{i \in [0, n]} \in \mathbb{K}^{n+1}$  telle que pour tout couple  $(i, j) \in [0, n]^2$ , avec  $i \neq j$  on a  $x_i \neq x_j$ .

Alors pour toute famille  $(y_i)_{i \in [0, n]} \in \mathbb{K}^{n+1}$  il existe un unique polynôme  $P \in \mathbb{K}_n[X]$  tel que pour tout  $i \in [0, n]$   $P(x_i) = y_i$

**Propriété II - 2 :**

Soit  $u$  et  $v$  deux endomorphismes de  $E$  de rangs finis.

- $\text{rg}(u \circ v) \leq \min(\text{rg}(u), \text{rg}(v))$
- si  $u$  est un isomorphisme alors  $\text{rg}(u \circ v) = \text{rg}(v)$
- si  $v$  est un isomorphisme alors  $\text{rg}(u \circ v) = \text{rg}(u)$ .

**2) Forme linéaire****Définition II - 3 : Forme linéaire**

Soit  $E$  un  $\mathbb{K}$ -espace vectoriel. On appelle forme linéaire toute application linéaire de  $E$  dans  $\mathbb{K}$ .

L'ensemble des formes linéaires est un  $\mathbb{K}$ -espace vectoriel noté  $E^* = \mathcal{L}(E, \mathbb{K})$ .

**Définition II - 4 : Hyperplan**

Soit  $E$  un  $\mathbb{K}$ -espace vectoriel.  $H$  un sous-espace vectoriel est un hyperplan s'il est le noyau d'une forme linéaire non nulle.

**Proposition II - 3 :**

$H$  est un hyperplan si et seulement si il existe une droite vectorielle qui lui soit supplémentaire.

**Proposition II - 4 :**

Soient  $\varphi$  et  $\psi$  deux formes linéaires non nulles sur un  $K$  espace vectoriel  $E$ . On a

$\ker(\varphi) = \ker(\psi)$  si et seulement si il existe  $k \in \mathbb{K}$  tel que  $\varphi = k.\psi$

### 3) Dimension finie

#### Proposition II - 5 : Forme non nulle

- Pour tout vecteur non nul  $e \in E$  il existe une forme linéaire  $\varphi$  telle que  $\varphi(e) = 1$ .
- Seul le vecteur nul est le vecteur en lequel toutes les formes linéaires s'annulent.

#### Proposition II - 6 : Equation d'un hyperplan

On considère  $E$  un  $\mathbb{K}$ -espace vectoriel de dimension finie égale à  $n$ .

Soit  $F$  une sous-espace vectoriel de  $E$ .

$F$  est un hyperplan de  $E$  si et seulement si  $\dim(F) = n - 1$ .

Si  $(e_i)_{i \in [1, n]}$  est une base de  $E$ , alors pour tout hyperplan  $H$  il existe une famille  $(a_i)_{i \in [1, n]} \in \mathbb{K}^n$  telle que

$$x = \sum_{i=1}^n x_i \cdot e_i \in H \Leftrightarrow \sum_{i=1}^n a_i \cdot x_i = 0$$

et tout ensemble vérifiant une telle équation est un hyperplan.

#### Théorème II - 3 :

Si  $F$  est un sous-espace vectoriel de  $E$  de dimension  $p$ , l'ensemble des formes linéaires s'annulant sur  $F$  est un sous-espace vectoriel de  $E^*$  de dimension  $n - p$ .

#### Théorème II - 4 :

Si  $\mathcal{B}^* = (\varphi_1, \dots, \varphi_q)$  est une famille libre de formes linéaires sur un espace vectoriel  $E$  de dimension  $n$ , l'intersection des noyaux respectifs  $H_i$  des formes linéaires  $\varphi_i$  est un sous-espace vectoriel  $F$  de  $E$  de dimension  $n - q$ . Toute forme linéaire s'annulant sur  $F$  est combinaison linéaire de  $(\varphi_1, \dots, \varphi_q)$ .

## III Calcul matriciel

### 1) Généralités

#### Définition III - 1 : Matrices équivalentes

Soient  $A$  et  $B$  deux matrices de  $\mathcal{M}_{n,p}(\mathbb{K})$ . On dit que  $A$  et  $B$  sont équivalentes si et seulement si il existe  $P \in Gl_n(\mathbb{K})$  et  $Q \in Gl_p(\mathbb{K})$  telles que  $B = P^{-1}AQ$ .

#### Proposition III - 1 : Caractérisation

Toute matrice  $M \in \mathcal{M}_{n,p}(\mathbb{K})$  de rang  $r$  est équivalente à la matrice  $J_r = \begin{pmatrix} I_r & 0_{r,p-r} \\ 0_{n-r,r} & 0_{n-r,p-r} \end{pmatrix}$

#### Corollaire III - 1 :

Deux matrices de  $\mathcal{M}_{n,p}(\mathbb{K})$  sont équivalentes si et seulement si elles ont même rang.

#### Définition III - 2 : Matrices semblables

Soient  $A$  et  $B$  deux matrices de  $\mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ . On dit que  $A$  et  $B$  sont semblables si et seulement si il existe  $P \in Gl_n(\mathbb{K})$  telle que  $A = P^{-1}BP$ .

## 2) Trace d'un endomorphisme

### Définition III - 3 :

Soit  $A = (a_{i,j})_{(i,j) \in \llbracket 1,n \rrbracket^2}$  une matrice, élément de  $\mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ . On appelle trace de  $A$  le nombre noté  $\text{tr}(A)$  ou  $\text{tr}(A)$  et défini par

$$\text{tr}(A) = \sum_{i=1}^n a_{ii}$$

### Proposition III - 2 :

L'application de  $\mathcal{M}_n(\mathbb{K})$  dans  $\mathbb{K}$  qui à  $A$  associe  $\text{tr}(A)$  est une application linéaire.

### Proposition III - 3 :

Pour toutes matrices  $A$  et  $B$  de  $\mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ , on a la relation

$$\text{tr}(AB) = \text{tr}(BA)$$

### Corollaire III - 2 :

Soit  $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$  et  $B \in \text{Gl}_n(\mathbb{K})$ , alors  $\text{tr}(A) = \text{tr}(B^{-1}AB)$ .  
C'est à dire que deux matrices semblables ont même trace.

### Définition III - 4 : Trace d'un endomorphisme

Soit  $E$  un espace vectoriel de dimension  $n$ , on considère  $f \in \mathcal{L}(E)$ , on appelle trace de  $f$  la trace des matrices de  $f$  dans n'importe quelle base.

### Proposition III - 4 : Trace d'un projecteur

Soit  $p$  un projecteur de  $E$ , espace vectoriel. On a alors l'égalité suivante :

$$\text{rg}(p) = \text{tr}(p)$$

## 3) Matrices par blocs

### Définition III - 5 : Ecriture par blocs

Soit  $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$  une matrice d'ordre  $n$ . On dit que  $A$  est définie par blocs s'il existe une famille de matrices  $(A_{ij})$  telle que  $A$  puisse s'écrire :

$$A = \begin{pmatrix} A_{1,1} & \dots & A_{1,p} \\ \vdots & A_{ij} & \vdots \\ A_{q,1} & \dots & A_{q,p} \end{pmatrix}$$

$A_{i,j}$  et  $A_{i,j+1}$  ont donc même nombre de ligne.

$A_{i,j}$  et  $A_{i+1,j}$  ont même nombre de colonnes.

Les matrices  $A_{ij}$  sont appelées sous matrices de  $A$ .

**Propriété III - 1 : Addition**

Soit  $A$  et  $B$  deux matrices d'ordre  $n$  s'écrivant par blocs de mêmes tailles :  $A = \begin{pmatrix} A_{1,1} & \dots & A_{1,p} \\ \vdots & A_{ij} & \vdots \\ A_{q,1} & \dots & A_{q,p} \end{pmatrix}$  et

$B = \begin{pmatrix} B_{1,1} & \dots & B_{1,p} \\ \vdots & B_{ij} & \vdots \\ B_{q,1} & \dots & B_{q,p} \end{pmatrix}$ , où, pour tout  $(i, j) \llbracket 1, q \rrbracket \times \llbracket 1, p \rrbracket$ ,  $A_{i,j}$  et  $B_{i,j}$  ont même taille. On a alors

$$A + B = \begin{pmatrix} A_{1,1} + B_{1,1} & \dots & A_{1,p} + B_{1,p} \\ \vdots & A_{ij} + B_{ij} & \vdots \\ A_{q,1} + B_{q,1} & \dots & A_{q,p} + B_{q,p} \end{pmatrix}$$

**Propriété III - 2 : Multiplication par blocs**

Soit  $A$  et  $B$  deux matrices d'ordre  $n$  s'écrivant par blocs :  $A = \begin{pmatrix} A_{1,1} & \dots & A_{1,p} \\ \vdots & A_{ij} & \vdots \\ A_{q,1} & \dots & A_{q,p} \end{pmatrix}$  et  $B =$

$\begin{pmatrix} B_{1,1} & \dots & B_{1,r} \\ \vdots & B_{ij} & \vdots \\ B_{p,1} & \dots & B_{p,r} \end{pmatrix}$ , où, pour tout  $(i, j, k) \llbracket 1, q \rrbracket \times \llbracket 1, p \rrbracket \times \llbracket 1, r \rrbracket$ , le nombre de colonnes de  $A_{i,j}$  est le même que le nombre de ligne que  $B_{j,k}$ . On a alors : le nombre de colonnes de  $A$  est le même que le

nombre de ligne que  $B$  et

$$AB = \begin{pmatrix} \dots & \vdots & \vdots \\ \vdots & \sum_{k=1}^p A_{ik} B_{kj} & \vdots \\ \dots & \vdots & \vdots \end{pmatrix}$$

**Propriété III - 3 : Transposée**

Soit  $A$  une matrice d'ordre  $n$  écrite par blocs :  $A = \begin{pmatrix} A_{1,1} & \dots & A_{1,p} \\ \vdots & A_{ij} & \vdots \\ A_{q,1} & \dots & A_{q,p} \end{pmatrix}$ .

La matrice  $A^\top$  s'écrit alors

$$A^\top = \begin{pmatrix} A_{1,1}^\top & \dots & A_{q,1}^\top \\ \vdots & A_{ji}^\top & \vdots \\ A_{1,p}^\top & \dots & A_{q,p}^\top \end{pmatrix}$$

**IV Sous-espaces affines d'un espace vectoriel****1) Translations**

On considère  $E$  un  $\mathbb{K}$  espace vectoriel.

**Définition IV - 1 : Translation**

On appelle translation de vecteur  $a$  toute application, notée  $t_a$ , de  $E$  dans  $E$  définie par :

$$\forall x \in E, \quad t_a(x) = a + x$$

**Notation :**

L'image d'une partie  $\Omega$  de  $E$  par une translation  $t_a$  est alors notée :  $a + \Omega$

**Remarque :**

Lorsque  $\Omega$  est un sous espace vectoriel de  $E$ ,  $a + \Omega$  n'est pas forcément un espace vectoriel.

**Notation :**

On note  $\mathfrak{S}(E)$  l'ensemble des translations de  $E$

**Proposition IV - 1 : Structure**

$(\mathfrak{S}(E), \circ)$  est un groupe abélien isomorphe à  $(E, +)$

**Démonstration :** Montrons que c'est un groupe : soit  $t_a$  et  $t_b$  deux translations de  $E$ , alors

$$\forall x \in E, t_a \circ t_b(x) = t_a(t_b(x)) = a + b + x = t_{a+b}(x)$$

donc  $t_a \circ t_b$  est bien une translation et donc la composition est une loi de composition interne. De plus on a :

$$\forall x \in E, t_0 \circ t_a(x) = a + x = t_a(x) = t_a \circ t_0(x)$$

donc  $t_0$  est un élément neutre pour cette loi,

$$\forall x \in E, t_a \circ (t_b \circ t_c)(x) = a + b + c + x = (t_a \circ t_b) \circ t_c(x)$$

la loi est donc associative, et

$$\forall x \in E, t_a \circ t_{-a}(x) = x = t_{-a} \circ t_a(x) = t_0$$

donc tout élément est symétrisable. Conclusion :  $(\mathfrak{S}(E), \circ)$  est un groupe, de plus

$$\forall x \in E, t_a \circ t_b(x) = t_b \circ t_a(x)$$

c'est donc un groupe commutatif.

On considère maintenant l'application qui à  $a \in E$  associe  $t_a$ , cette application est un morphisme de groupe, en effet d'après les calculs précédents on a :

$$\forall x \in E, t_a \circ t_b(x) = t_{a+b}(x)$$

Elle est surjective par définition des translations et de façon immédiate injective.

**Conclusion :** c'est un isomorphisme de groupe.

**2) Sous espaces affines****a) Généralités****Définition IV - 2 : Sous-espace affine**

Une partie  $A$  de  $E$  est un **sous espace affine** de  $E$  si  **$A$  est vide** ou si il existe  $a \in E$  et un sous espace vectoriel  $F$  tel que  $A = a + F$

**Proposition IV - 2 :**

Soit  $a \in E$  et  $F$  un sous espace vectoriel de  $E$ , alors on a  $a + F = F$  si et seulement si  $a \in F$

**Proposition IV - 3 :**

$a + F \subset b + G$  si et seulement si  $F \subset G$  et  $b - a \in G$

**Corollaire IV - 1 :**

$b + F = a + F$  si et seulement si  $b \in a + F$

**Corollaire IV - 2 :**

$0_E \in a + F$  si et seulement si  $a + F$  est un sous espace vectoriel

**Corollaire IV - 3 : Postulat d'Euclide**

$a + F = a + G \Leftrightarrow F = G$

**Définition IV - 3 : Direction d'un sous espace affine**

Soit  $\mathcal{A} = a + F$  un sous espace affine de  $E$ , alors on appelle  $F$  la **direction** de  $\mathcal{A}$ .

On note souvent  $F = \vec{\mathcal{A}}$

**Définition IV - 4 : Parallélisme**

Soient  $a + F$  et  $b + G$  deux sous espaces affines de  $E$ , on dit que

- $a + F$  est parallèle à  $b + G$  si  $F \subset G$
- $a + F$  et  $b + G$  sont parallèles si  $F = G$

**Proposition IV - 4 : Equations linéaires**

Si  $f$  est un élément de  $\mathcal{L}(E, F)$ , l'ensemble des solutions de l'équation  $f(x) = a$  d'inconnue  $x$  est soit l'ensemble vide, soit un sous-espace affine dirigé par  $\ker(f)$ .

Autrement dit, lorsque l'ensemble des solutions est non vide, il est de la forme  $x_0 + \ker(f)$ , où  $x_0$  est une solution particulière.

**b) Hyperplans affines****Définition IV - 5 : Hyperplan affine**

Soit  $E$  un espace vectoriel de dimension finie égale à  $n$ .

On appelle hyperplan affine de  $E$  toute partie non vide de  $E$  de la forme :  $\mathcal{A} = u + F$  où  $u \in E$  et  $F$  est un hyperplan vectoriel de  $E$ , c'est à dire un sous-espace vectoriel de dimension  $n - 1$  ou le noyau d'une forme linéaire non nulle.

**3) Intersections de sous espaces affines****Proposition IV - 5 :**

Soit  $A$  et  $B$  deux sous espaces affines de  $E$ , de directions respectives  $F$  et  $G$ , soient  $a$  et  $b$  deux points de  $E$  respectivement de  $A$  et  $B$ . Alors on a

$$A \cap B \neq \emptyset \Leftrightarrow (a - b) \in F + G$$

De plus, si  $A \cap B \neq \emptyset$ , alors  $A \cap B$  est un sous espace affine de direction  $F \cap G$

**Proposition IV - 6 :**

Soient  $A$  et  $B$  deux sous espaces affines, si  $A$  est parallèle à  $B$  alors  $A \cap B = \emptyset$  ou  $A \subset B$

**Proposition IV - 7 : Systèmes linéaires**

L'ensemble des solutions d'un système de  $p$  équations à  $n$  inconnues est un sous espace affine de  $\mathbb{R}^n$  dont la direction, s'il est non vide, est un sous-espace vectoriel de dimension au moins  $n - p$ .

**V Déterminant****1) Déterminant de  $n$  vecteurs****Définition V - 1 : Forme  $n$ -linéaire**

On appelle forme  $n$ -linéaire une application de  $E^n$  dans  $\mathbb{K}$  telle que : si  $\varphi$  est cette application, pour tout  $(x_i)_{i \in \llbracket 1, n \rrbracket} \in E^n$  et tout  $j \in \llbracket 1, n \rrbracket$

$$\varphi(x_1, x_2, \dots, x_{j-1}, \cdot, x_{j+1}, \dots, x_n) : \begin{array}{l} E \rightarrow \mathbb{K} \\ y \mapsto \varphi(x_1, x_2, \dots, x_{j-1}, y, x_{j+1}, \dots, x_n) \end{array}$$

est linéaire

**Définition V - 2 :**

Une application est dite

- antisymétrique si, pour tout  $(x_i)_{i \in \llbracket 1, n \rrbracket} \in E^n$

$$\varphi(x_1, x_2, \dots, x_i, \dots, x_{j-1}, x_j, x_{j+1}, \dots, x_n) = -\varphi(x_1, x_2, \dots, x_j, \dots, x_{j-1}, x_i, x_{j+1}, \dots, x_n)$$

- alternée si, pour tout  $(x_i)_{i \in \llbracket 1, n \rrbracket} \in E^n$  tel qu'il existe  $(i_1, i_2) \in \llbracket 1, n \rrbracket$   $i_1 \neq i_2$  et  $x_{i_1} = x_{i_2}$

$$\varphi(x_1, x_2, \dots, x_n) = 0$$

**Proposition V - 1 :**

Une forme  $n$ -linéaire est antisymétrique si et seulement si elle est alternée.

**Théorème V - 1 : Déterminant**

Soit  $E$  un espace vectoriel de dimension  $n$ . Soit  $\mathcal{B} = (e_i)_{i \in \llbracket 1, n \rrbracket}$  une base de  $E$ .

Il existe une et une seule forme  $n$ -linéaire alternée  $\varphi$  telle que

$$\varphi(e_1, e_2, \dots, e_n) = 1$$

Cette forme est appelée déterminant dans la base  $\mathcal{B}$  et on la note  $\det_{\mathcal{B}}$

**Théorème V - 2 :**

Soit  $E$  un espace vectoriel de dimension  $n$ . L'ensemble des formes  $n$ -linéaires alternées est un espace vectoriel de dimension 1.

**Proposition V - 2 :**

Soient  $\mathcal{B}$  et  $\mathcal{B}'$  deux bases de  $E$ , alors on a les relations suivantes

$$\det_{\mathcal{B}'} = \det_{\mathcal{B}'}(\mathcal{B}) \cdot \det_{\mathcal{B}}$$

$$\det_{\mathcal{B}'}(\mathcal{B}) \cdot \det_{\mathcal{B}}(\mathcal{B}') = 1$$

**Proposition V - 3 :**

Soit  $\mathcal{B}$  une base de  $E$  et  $\mathcal{V} = (v_1, v_2, \dots, v_n)$  une famille de  $n$  vecteurs de  $E$ .

$\mathcal{V}$  est une base de  $E$  si et seulement si  $\det_{\mathcal{B}}(\mathcal{V}) \neq 0$ .

**Proposition V - 4 : Equation d'un hyperplan défini par  $n - 1$  vecteurs**

soit  $H = \text{vect}(v_1, v_2, \dots, v_{n-1})$  un hyperplan de  $E$ . On a

$$x \in H \Leftrightarrow \det_{\mathcal{B}}(v_1, v_2, \dots, v_{n-1}, x) = 0$$

**2) Déterminant d'un endomorphisme****Théorème V - 3 :**

Soit  $f \in \mathcal{L}(E)$  et  $\mathcal{B} = (e_i)_{i \in [1, n]}$  une base de  $E$ , le nombre  $\det_{\mathcal{B}}(f(e_1), f(e_2), \dots, f(e_n))$  est indépendant de la base choisie.

Il est appelé déterminant de  $f$  et noté  $\det(f)$ .

**Proposition V - 5 : Composée d'endomorphisme :**

soient  $f$  et  $g$  deux endomorphismes de  $E$ , on a l'égalité suivante :

$$\det(f \circ g) = \det(f) \det(g)$$

**Proposition V - 6 : Caractérisation des automorphismes**

$f \in \mathcal{L}(E)$  est un automorphisme de  $E$  si et seulement si  $\det(f) \neq 0$

**3) Déterminant d'une matrice carrée****Définition V - 3 :**

Soit  $A = (a_{ij}) \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ , cette matrice est caniniquement associée (matrice dans la base canonique) à un endomorphisme  $f$  de  $\mathbb{K}^n$ . On appelle déterminant de  $A$ ,  $\det(f)$ . Ce déterminant est aussi, par définition, le déterminant des vecteurs colonnes de la matrices, dans la base canonique.

On le note  $\det(A)$  ou encore

$$\det(A) = \begin{vmatrix} a_{11} & \cdots & a_{1n} \\ \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix}$$



**Proposition V - 7 :**

$$\forall A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K}) \quad \forall \lambda \in \mathbb{K} \quad \det(\lambda A) = \lambda^n \det(A)$$

**Proposition V - 8 :**

Pour toutes matrices  $A$  et  $B$  carrées d'ordre  $n$

$$\det(AB) = \det(A) \det(B)$$

**Proposition V - 9 :**

$A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$  est inversible si et seulement si  $\det(A) \neq 0$ .

De plus si  $A$  est inversible alors

$$\det(A^{-1}) = \frac{1}{\det(A)}$$

**Proposition V - 10 :**

Soit  $A$  une matrice carrée, on a

$$\det(A) = \det(A^T)$$

**4) Méthodes de calculs****Proposition V - 11 : Formule**

Soit  $A = (a_{ij})$  une matrice carrée d'ordre  $n$ .

On a

$$\det(A) = \sum_{\sigma \in S_n} \varepsilon(\sigma) \prod_{i=1}^n a_{i\sigma(i)}$$

En appelant  $A_{ij}$  la matrice obtenue par  $A$  en enlevant la  $i^{\text{ième}}$  ligne et la  $j^{\text{ième}}$  colonne,  
— développée suivant la  $j^{\text{ième}}$  colonne

$$\det(A) = \sum_{k=1}^n (-1)^{k+j} a_{kj} \det(A_{kj})$$

— développée suivant la  $i^{\text{ième}}$  ligne

$$\det(A) = \sum_{k=1}^n (-1)^{k+i} a_{ik} \det(A_{ik})$$

**Définition V - 4 : Cofacteur**

Le terme  $(-1)^{i+j} \det(A_{ij})$  est appelé cofacteur du terme  $(i, j)$ . ( $\det(A_{ij})$  est le mineur du coefficient).

**Définition V - 5 : Comatrice**

Soit  $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ , avec les notations précédentes, on appelle comatrice de  $A$ , la matrice des cofacteurs de  $A$  et la note  $\text{Com}(A)$ .

**Propriété V - 1 :**

Pour toute matrice  $A$  on a :

$$A \operatorname{Com}(A)^\top = \operatorname{Com}(A)^\top A = \det(A) I_n$$

**5) Déterminant par blocs****Proposition V - 12 : Déterminant par blocs**

Soit  $A \in \mathcal{M}_p(\mathbb{K})$ ,  $C \in \mathcal{M}_q$  et  $B \in \mathcal{M}_{p,q}(\mathbb{K})$ .

On a

$$\det \begin{pmatrix} A & B \\ 0 & C \end{pmatrix} = \det(A) \det(C)$$

**Proposition V - 13 : Généralisation**

Soit  $A$  une matrice triangulaire par blocs :  $A = \begin{pmatrix} A_1 & & & & \\ 0 & \ddots & & & \\ \vdots & & A_i & & \\ \vdots & (0) & & \ddots & \\ 0 & \dots & \dots & 0 & A_p \end{pmatrix}$ .

On a

$$\det(A) = \prod_{i=1}^p \det(A_i)$$

**Définition V - 6 : Transvections par blocs**

On appelle transvection par blocs une opération transformant une matrice par blocs  $\begin{pmatrix} A & B \end{pmatrix}$  en une matrice de la forme  $\begin{pmatrix} A & B + \lambda A \end{pmatrix}$  (à la condition que  $A$  et  $B$  ont le même nombre de colonnes) ou une matrice par blocs  $\begin{pmatrix} A \\ B \end{pmatrix}$  en une matrice  $\begin{pmatrix} A \\ B + \lambda A \end{pmatrix}$  (à la condition que  $A$  et  $B$  ont le même nombre de lignes).

**Propriété V - 2 :**

Le déterminant d'une matrice carrée est invariant par transvection par blocs.