Séries numériques

Table des matières

I Généralités **2**

II Séries à termes réels positifs **3**

III Séries quelconques **5**

IV Séries alternées **6**

V Sommation des relations de comparaisons **7**

VI Résumé **8**

Dans tout ce chapitre $\mathbb{K}$ désigne le corps des réels ou le corps des complexes.

I Généralités

Définition I - 1 : Série formelle

Soit $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite de nombres réels ou complexes. On appelle série de terme général u_n la suite $(S_n)_{n\in\mathbb{N}}$ définie par $S_n = \sum_{k=0}^{n} u_k$.

Le terme de cette suite est appelé somme partielle de la série.

On note $\sum u_n$ (ou $\sum_{n\geqslant 0} u_n$) cette série.

Définition I - 2 : Série convergente

Soit $\sum u_n$ une série, on dit que la série est convergente si la suite des sommes partielles converge.

On note alors

$$\sum_{n=0}^{+\infty} u_n = \lim_{n\to+\infty} \sum_{k=0}^{n} u_k$$

la limite de la suite et on dit que c'est la somme de la série.

Si on note S cette limite, $S - S_n = \sum_{k=n+1}^{+\infty} u_k$ est appelé reste d'ordre n.

Une série qui n'est pas convergente est dite divergente.

Remarque : convergence et reste

D'après la définition on a directement que le reste d'une série convergente est une suite qui converge vers 0

Proposition I - 1 :

Si la série $\sum u_n$ converge alors la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge vers 0.

Définition I - 3 :

Lorsque la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ ne converge pas vers 0 on dit que la série $\sum u_n$ est grossièrement divergente.

Remarque : importante

la condition $\lim_{n\to+\infty} u_n = 0$ *est donc une condition nécessaire mais loins d'être suffisante. Il suffit de regarder la série harmonique.*

Propriété I - 1 : Suite-série

Soit $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite d'éléments de $\mathbb{K}$.

La suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ et la série télescopique $\sum(u_{n+1} - u_n)$ ont même nature.

Proposition I - 2 : Espaces des séries convergentes

L'ensemble des séries convergentes muni de l'addition et la multiplication externe usuelles sur l'ensemble des suites, est un espace vectoriel.

De plus l'application de cet espace dans $\mathbb{K}$, qui à une série associe sa somme, est linéaire.

Propriété I - 2 :

Une série à termes complexes converge si et seulement si la série des parties réelles et la série des parties imaginaires convergent.

Propriété I - 3 : Série géométrique

La série $\sum z^n$ avec $z \in \mathbb{C}$ est convergente si et seulement si $|z| < 1$

De plus sa somme est alors $\dfrac{1}{1-z}$.

II Séries à termes réels positifs

Dans cette partie on ne considère que des séries à termes réels et positifs.

Théorème II - 1 : Convergence

Pour qu'une série $\sum u_n$ de nombres réels positifs converge, il faut et il suffit que la suite des sommes partielles soit majorée.

De plus on a

$$\sum_{n=0}^{+\infty} u_n = \lim_{n\to+\infty} S_n = \sup_{n\in\mathbb{N}} S_n$$

Définition II - 1 :

On appelle série de Riemann toute série de la forme $\sum \dfrac{1}{n^\alpha}$ avec $\alpha \in \mathbb{R}$

Propriété II - 1 : Convergence

La série de Riemann $\sum \dfrac{1}{n^\alpha}$ est convergente si $\alpha > 1$.

Elle diverge si $\alpha \leq 1$

Théorème II - 2 :

Soient $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ et $(\alpha_n)_{n\in\mathbb{N}}$ deux suites de nombres réels **positifs** telles que $u_n = O(\alpha_n)$. On a alors, si la série $\sum \alpha_n$ converge alors la série $\sum u_n$ converge aussi.

Corollaire II - 1 :

Si pour tout $n \in \mathbb{N}$, ou à partir d'un certain rang, on a $0 \leqslant u_n \leqslant \alpha_n$ alors la convergence de la série $\sum v_n$ entraine la convergence de la série $\sum u_n$.

Corollaire II - 2 :

Soient $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ et $(\alpha_n)_{n\in\mathbb{N}}$ deux suites de nombres réels **positifs**.

Si $u_n \sim v_n$ alors les séries $\sum u_n$ et $\sum v_n$ ont même nature.

Exemple II - 1 :
Exercice 7 banque CCINP

1) Soient $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ et $(v_n)_{n\in\mathbb{N}}$ deux suites de nombres réels positifs.
On suppose que $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ et $(v_n)_{n\in\mathbb{N}}$ sont non nulles à partir d'un certain rang.
Montrer que :

$$u_n \underset{+\infty}{\sim} v_n \implies \sum u_n \text{ et } \sum v_n \text{ sont de même nature.}$$

2) Étudier la convergence de la série $\displaystyle\sum_{n\geqslant 2} \frac{((-1)^n + \mathrm{i}) \ln n \sin\left(\frac{1}{n}\right)}{\left(\sqrt{n+3}-1\right)}$.

Remarque : i désigne le nombre complexe de carré égal à -1.

Corollaire II - 3 : Application pratique (critère de Riemann) (HP)

1. si une suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ vérifie $u_n = O\left(\frac{1}{n^\alpha}\right)$ avec $\alpha > 1$ alors elle est convergente.
2. si une suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ vérifie $\frac{1}{n^\alpha} = O(u_n)$ avec $\alpha \leq 1$ alors elle est divergente

---

Exemple II - 2 :
Exercice 5 banque CCINP

1) On considère la série de terme général $u_n = \dfrac{1}{n\left(\ln(n)\right)^\alpha}$ où $n \geqslant 2$ et $\alpha \in \mathbb{R}$.

(a) **Cas** $\alpha \leqslant 0$
En utilisant une minoration très simple de u_n, démontrer que la série diverge.

(b) **Cas** $\alpha > 0$
Étudier la nature de la série.
Indication : on pourra utiliser la fonction f définie par $f(x) = \dfrac{1}{x(\ln x)^\alpha}$.

2) Déterminer la nature de la série $\displaystyle\sum_{n\geqslant 2} \frac{\left(\mathrm{e} - \left(1+\frac{1}{n}\right)^n\right)\mathrm{e}^{\frac{1}{n}}}{\left(\ln(n^2+n)\right)^2}$.

Proposition II - 1 : (HP)

Soient $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ et $(v_n)_{n\in\mathbb{N}}$ deux suites de réels strictement positifs.
On suppose qu'il existe $n_0 \in \mathbb{N}$ tel que pour tout $n \geq n_0$ $\quad \dfrac{u_{n+1}}{u_n} \leqslant \dfrac{v_{n+1}}{v_n}$
Alors :

1) si la série $\sum u_n$ diverge alors $\sum v_n$ diverge

2) si la série $\sum v_n$ converge alors $\sum u_n$ converge et de plus pour $n \geq n_0$

$$\sum_{k=n+1}^{+\infty} u_k \leqslant \frac{u_n}{v_n} \sum_{k=n+1}^{+\infty} v_k$$

Corollaire II - 4 : (HP)

Soit $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite de réels strictement positifs

1) S'il existe $\lambda \in]0,1[$ et $n_0 \in \mathbb{N}$ tels que pour tout $n \geq n_0$ $\dfrac{u_{n+1}}{u_n} \leq \lambda$, alors la série $\sum u_n$ converge et pour tout $n \geq n_0$

$$0 \leq R_n = \sum_{k=n+1}^{+\infty} u_k \leq \frac{\lambda.u_n}{1-\lambda}$$

2) S'il existe $n_0 \in \mathbb{N}$ tels que pour tout $n \geq n_0$ $\dfrac{u_{n+1}}{u_n} \geq 1$ alors la série $\sum u_n$ diverge (grossièrement)

Théorème II - 3 : Règle de D'Alembert

Soit $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite de réels strictement positifs.

S'il existe λ tel que $\displaystyle\lim_{n\to+\infty} \frac{u_{n+1}}{u_n} = \lambda$ alors :

a) si $\lambda < 1$ la série $\sum u_n$ converge

b) si $\lambda > 1$ la série diverge

c) si $\lambda = 1$, on ne peut rien dire.

Exemple II - 3 :

Exercice 6 banque CCINP

Soit $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite de réels strictement positifs et l un réel positif strictement inférieur à 1.

1) Démontrer que si $\displaystyle\lim_{n\to+\infty} \frac{u_{n+1}}{u_n} = l$, alors la série $\sum u_n$ converge.

Indication : écrire, judicieusement, la définition de $\displaystyle\lim_{n\to+\infty} \frac{u_{n+1}}{u_n} = l$, puis majorer, pour n assez grand, u_n par le terme général d'une suite géométrique.

2) Quelle est la nature de la série $\displaystyle\sum_{n\geqslant 1} \frac{n!}{n^n}$?

Théorème II - 4 : Comparaison série-intégrale (HP)

Soit f une fonction continue par morceaux sur $[a,+\infty[$ et positive.

On suppose de plus que f est décroissante.

On pose $w_n = \displaystyle\int_{n-1}^{n} f(t)\,dt - f(n)$ pour $n \geq a+1$.

Alors la série $\sum w_n$ est convergente

III Séries quelconques

Définition III - 1 : Absolue convergence

Une série $\sum u_n$ est dite absolument convergente si la série $\sum |u_n|$ est convergente.

Théorème III - 1 :

Toute série absolument convergente est convergente.
De plus si $\sum u_n$ est une telle série, on a

$$\left|\sum_{n=0}^{+\infty} u_n\right| \leq \sum_{n=0}^{+\infty} |u_n|$$

Théorème III - 2 :

Soient $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite complexe et $(\alpha_n)_{n\in\mathbb{N}}$ suite de nombres réels **positifs** telles que $u_n = O(\alpha_n)$.
On a alors, si la série $\sum \alpha_n$ converge alors la série $\sum u_n$ converge absolument.

Exemple III - 1 :

exercice 46 Banque CCINP

On considère la série : $\sum\limits_{n\geqslant 1} \cos\left(\pi\sqrt{n^2+n+1}\right)$.

1) Prouver que, au voisinage de $+\infty$, $\pi\sqrt{n^2+n+1} = n\pi + \frac{\pi}{2} + \alpha\frac{\pi}{n} + O\left(\frac{1}{n^2}\right)$ où α est un réel que l'on déterminera.

2) En déduire que $\sum\limits_{n\geqslant 1} \cos\left(\pi\sqrt{n^2+n+1}\right)$ converge.

3) $\sum\limits_{n\geqslant 1} \cos\left(\pi\sqrt{n^2+n+1}\right)$ converge-t-elle absolument ?

Proposition III - 1 : Série exponentielle

Pour tout nombre complexe z, la série $\sum \frac{z^n}{n!}$ est absolument convergente.

Par définition on a $\exp(z) = \sum\limits_{n=0}^{+\infty} \frac{z^n}{n!}$.

Définition III - 2 : Produit de Cauchy

On appelle produit de Cauchy de deux séries $\sum u_n$ et $\sum v_n$ la série $\sum w_n$ définie par $w_n = \sum\limits_{k=0}^{n} u_k v_{n-k}$

Théorème III - 3 : Convergence

Si les séries $\sum u_n$ et $\sum v_n$ sont absolument convergentes, alors leur produit de Cauchy $\sum w_n$ l'est aussi.
De plus dans ce cas $\sum\limits_{n=0}^{+\infty} w_n = \sum\limits_{n=0}^{+\infty} u_n \sum\limits_{n=0}^{+\infty} v_n$.

IV Séries alternées

Définition IV - 1 :

On appelle série alternée toute série réelle $\sum u_n$ telle la suite $((-1)^n u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est de signe constant.

Théorème IV - 1 : Critère spécial des séries alternées ou critère de Leibniz

On considère une série alternée $\sum u_n$.
Si la suite $(|u_n|)_{n\in\mathbb{N}}$ est décroissante et convergente vers 0 alors la série $\sum u_n$ est convergente.

Théorème IV - 2 : Autre formulation

Si la suite réelle $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge en décroissant vers 0, alors la série $\sum(-1)^n u_n$ converge.

Propriété IV - 1 : Majoration et signe du reste

Soit $\sum u_n$ une série alternée convergente d'après le critère précédent. Si on note L sa somme on a

$$\forall n \in \mathbb{N} \qquad |L - S_n| \leq |u_{n+1}|$$

De plus le reste d'ordre n, $\displaystyle\sum_{k=n+1}^{+\infty} u_k$, est du signe de son premier terme, c'est à dire u_{n+1}.

Exemple IV - 1 :

exercice 8 de la banque

1) Soit $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite décroissante positive de limite nulle.

(a) Démontrer que la série $\sum (-1)^k u_k$ est convergente.

Indication : on pourra considérer $(S_{2n})_{n\in\mathbb{N}}$ et $(S_{2n+1})_{n\in\mathbb{N}}$ avec $S_n = \displaystyle\sum_{k=0}^{n} (-1)^k u_k$.

(b) Donner une majoration de la valeur absolue du reste de la série $\sum (-1)^k u_k$.

2) On pose : $\forall\, n \in \mathbb{N}^*, \forall\, x \in \mathbb{R},\ f_n(x) = \dfrac{(-1)^n e^{-nx}}{n}$.

(a) Étudier la convergence simple sur $\mathbb{R}$ de la série de fonctions $\displaystyle\sum_{n\geqslant 1} f_n$.

(b) Étudier la convergence uniforme sur $[0, +\infty[$ de la série de fonctions $\displaystyle\sum_{n\geqslant 1} f_n$.

V Sommation des relations de comparaisons

Théorème V - 1 : Séries divergentes

Soit $\sum \alpha_n$ une série à termes réels positifs (ou positive à partir d'un certain rang) divergente.

1) Si $\sum u_n$ est une série à termes complexes telle que $u_n = O(\alpha_n)$ alors $\displaystyle\sum_{k=0}^{n} u_k = O\left(\sum_{k=0}^{n} \alpha_k\right)$.

2) Si $\sum u_n$ est une série à termes complexes telle que $u_n = o(\alpha_n)$ alors $\displaystyle\sum_{k=0}^{n} u_k = o\left(\sum_{k=0}^{n} \alpha_k\right)$.

3) Si $\sum u_n$ est une série réelle à termes positifs telle que $u_n \sim \alpha_n$ alors la série $\sum u_n$ diverge et $\displaystyle\sum_{k=0}^{n} u_k \sim \sum_{k=0}^{n} \alpha_k$.

Théorème V - 2 : Séries convergentes

Soit $\sum \alpha_n$ une série à termes réels positifs (ou positive à partir d'un certain rang) convergente.

1) Si $\sum u_n$ est une série à termes complexes telle que $u_n = O(\alpha_n)$ alors $\displaystyle\sum_{k=n+1}^{+\infty} u_k = O\left(\sum_{k=n+1}^{+\infty} \alpha_k\right)$.

2) Si $\sum u_n$ est une série à termes complexes telle que $u_n = o(\alpha_n)$ alors $\displaystyle\sum_{k=n+1}^{+\infty} u_k = o\left(\sum_{k=n+1}^{+\infty} \alpha_k\right)$.

3) Si $\sum u_n$ est une série réelle à termes positifs telle que $u_n \sim \alpha_n$ alors la série $\sum u_n$ converge et $\displaystyle\sum_{k=n+1}^{+\infty} u_k \sim \sum_{k=n+1}^{+\infty} \alpha_k$.

Théorème V - 3 : de Cesàro

Soit $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite complexe.

– si $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge vers ℓ alors la suite $\displaystyle\left(\frac{1}{n+1}\sum_{k=0}^{n} u_k\right)_{n\in\mathbb{N}}$ converge aussi vers ℓ

– si $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est une suite réelle divergente vers $\pm\infty$ alors la suite $\displaystyle\left(\frac{1}{n+1}\sum_{k=0}^{n} u_k\right)_{n\in\mathbb{N}}$ diverge aussi vers $\pm\infty$.

VI Résumé

Etude de la convergence d'une série : $\sum u_n$

- On vérifie, si c'est rapide, que la suite converge bien vers 0
- On majore en valeur absolue le terme de la suite par une suite dont la série est absolument convergente.
- Pour une suite **de signe constant** on cherche un équivalent
- On utilise la méthode comparaison série intégrale
- On utilise la règle de D'Alembert
- On utilise le critère spécial des séries alternées
- On fait une étude des sommes partielles.

Pour calculer la somme d'une série :

- On utilise des séries connues
- On utilise des séries entières
- On utilise des sommes téléscopiques
- On utilise le produit de Cauchy
- On utilise des intégrales (séries d'intégrales)

Pour estimer un reste d'une série convergente :

- On utilise le résultat sur les séries alternées
- On utilise la comparaison série intégrale
- On utilise la sommation des relations de comparaison