Correction : devoir surveillé n°7

MP Clemenceau 2019-20

Jeudi 5 mars 2020

Remarques : ce qui est en rouge concerne les remarques d'ordre général, en bleu les remarques personnelles. Les notes sur 4 par question sont aussi en bleu en début de correction.

Remarques générales importantes :

- *Toujours tout bien justifier même ce qui pourrait paraitre évident. Ce que vous vous dites pour justifier une égalité, une implication, une équivalence ... il faut l'écrire.*
- *Lorsqu'une matrice A est diagonalisable il est inutile de passer par la diagonalisation (matrice de passage et matrice diagonale) pour dire que le déterminant est le produit des valeurs propres et la trace la somme des valeurs propres. Je rappelle que c'est une conséquence du caractère scindé du polynôme caractéristique.*
- *Toute application φ bilinéaire vérifie $\varphi(0,0) = 0$. Il est donc inutile de l'écrire pour le caractère défini d'un produit scalaire (à condition de bien commencer par la bilinéarité).*
- *Eviter d'utiliser des doubles indices dans les matrices colonnes et les coefficients diagonaux d'une matrice diagonale. Cela alourdit la notation.*
- *Ne pas confondre la norme sur les matrices carrées et la norme usuelle sur les matrices colonnes qui n'a pas besoin de l'application trace.*

Sujet type CentraleSupélec

Rappels et notations

Pour tout entier naturel non nul n, on note :

- $[\![1, n]\!]$ l'ensemble des entiers naturels k tels que $1 \leqslant k \leqslant n$;
- $\mathscr{M}_n(\mathbb{R})$ (respectivement $\mathscr{M}_{n,1}(\mathbb{R})$) l'espace vectoriel des matrices carrées à n lignes et n colonnes (respectivement l'espace vectoriel des matrices colonnes à n lignes) à coefficients dans $\mathbb{R}$;
- $\mathscr{S}_n(\mathbb{R})$ le sous-espace vectoriel de $\mathscr{M}_n(\mathbb{R})$ constitué des matrices symétriques.

Soit $n \in \mathbb{N}^*$ et $A \in \mathscr{S}_n(\mathbb{R})$; on dit que A est positive (respectivement définie positive) si :

$$\forall X \in \mathscr{M}_{n,1}(\mathbb{R}), X^\top AX \geqslant 0 \quad (\text{respectivement } X^\top AX > 0 \text{ si } X \neq 0).$$

L'espace vectoriel des polynômes à coefficients réels est noté $\mathbb{R}[X]$, et, pour tout entier naturel p, le sous-espace vectoriel des polynômes de degré inférieur ou égal à p est noté $\mathbb{R}_p[X]$.

Objectifs

La première partie a pour but de démontrer une caractérisation des matrices symétriques réelles définies positives, à l'aide des déterminants de certaines matrices extraites.

La deuxième partie aborde l'étude d'une suite de polynômes orthogonaux pour un produit scalaire défini à l'aide d'une intégrale.

La troisième partie introduit les matrices de HILBERT et leur inverse, dont certaines propriétés sont étudiées dans la partie IV.

I — Caractérisation des matrices symétriques définies positives

1) Soit $n \in \mathbb{N}^*$ et $A \in \mathscr{S}_n(\mathbb{R})$.

a) Montrer que A est positive si et seulement si toutes ses valeurs propres sont positives.

Correction : Soit S une matrice symétrique.

On suppose que S est un élément de $\mathscr{S}_n^+(\mathbb{R})$, on a alors, par définition, que pour tout $X \in \mathscr{M}_{n,1}(\mathbb{R})$, $X^\top SX \geqslant 0$. Pour X vecteur propre associé à λ on a alors $\lambda X^\top X \geqslant$. Or $X^\top X = \displaystyle\sum_{i=1}^{n} x_i^2$ et comme X est non nul, ceci est strictement positif, donc λ est aussi positive.

Réciproquement : on suppose que S n'admet que des valeurs propres positives ou nulles. D'après le théorème spectral S est diagonalisable à l'aide d'une matrice orthogonale. Il existe donc $P \in \mathscr{O}_n$ et une matrice diagonale D à coefficients positifs telles que $S = PDP^\top$. On note $D = diag(\lambda_1, \ldots, \lambda_n)$. Soit $X \in \mathscr{M}_n(\mathbb{R})$. On a $X^\top SX = (^\top P^\top X)D(P^\top X)$. Si on nonte $(y_i)_{i\in[\![1,n]\!]}$ les coefficients de $P^\top X$, alors $X^\top SX = \sum_{i=1}^{n} \lambda_i y_i^2$. On en déduit que $X^\top SX \geqslant 0$.

Lors de l'utilisation du théorème spectral l'écriture $A = P^\top DP$ n'est pas fausse mais P n'est pas alors la matrice de passage de la base canonique à la base de vecteurs propres. Dans le cas d'étude d'endomorphismes canoniquement associés cela peut créer des problèmes.

b) Montrer que A est définie positive si et seulement si toutes ses valeurs propres sont strictement positives.
Correction : en reprenant la démonstration précédente, on a directement le fait que les valeurs propres sont strictement positives

2) Pour $n \in \mathbb{N}^*, A \in \mathscr{S}_n(\mathbb{R})$ et $i \in [\![1, n]\!]$, on note $A^{(i)}$ la matrice carrée d'ordre i extraite de A, constituée par les i premières lignes et les i premières colonnes de A.
Le but de cette question est de démontrer l'équivalence suivante :

$$A \text{ est définie positive } \iff \forall i \in [\![1, n]\!], \det(A^{(i)}) > 0.$$

a) Soit $A \in \mathscr{S}_n(\mathbb{R})$. On suppose que A est définie positive.
Pour tout $i \in [\![1, n]\!]$, montrer que la matrice $A^{(i)}$ est définie positive et en déduire que $\det(A^{(i)}) > 0$.
Correction : Soit $A \in \mathscr{S}_n(\mathbb{R})$ que nous supposons définie positive et soit $X_i \in \mathscr{M}_{i,1}(\mathbb{R})$ non nul, alors en posant $X = \begin{pmatrix} X_i \\ O \end{pmatrix}$ où $O \in M_{n-i,1}(R)$, on aura $X_i^\top AX_i = X^\top AX > 0$, donc $A^{(i)}$ est définie positive pour tout $i \in [[1, n]]$.

On déduit donc que $\det(A^{(i)}) = \prod_{k=1}^{i} \mu_k > 0$ où $\mu_1, ..., \mu_i$ sont les valeurs propres de $A^{(i)}$ qui sont strictement positifs. *Rien ne dit que ce sont des valeurs propres de A.*

Pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, on dira qu'une matrice A de $\mathcal{S}_n(\mathbb{R})$ vérifie la propriété $\mathcal{P}_n$ si $\det(A^{(i)}) > 0$ pour tout $i \in [\![1, n]\!]$.

b) Dans les cas particuliers $n = 1$ et $n = 2$, montrer directement que toute matrice $A \in \mathscr{S}_n(\mathbb{R})$ vérifiant la propriété $\mathcal{P}_n$ est définie positive.
Correction : *pourquoi chercher la définition du début alors qu'on vient de trouver une nouvelle caractérisation plus simple ? Il faut chercher les valeurs propres.*
Pour $n = 1$ la matrice A est (a). a est alors l'unique valeur propre. On a aussi $\det(A) = a$. Donc si $\det(A) > 0$ alors $a > 0$ et donc A est définie positive.
Pour $n = 2$, on écrit $A = \begin{pmatrix} a & b \\ b & c \end{pmatrix}$. La condition $\mathcal{P}_n$ s'écrit alors « $a > 0$ et $ac - b^2 > 0$ ».
Le déterminant étant strictement positif les deux valeurs propres de A sont de même signe et non nulles. On a de plus $ac > b^2 \leqslant 0$, donc a et c ont même signe. Or la trace est égale à la somme des valeurs propres et à $a+c$, les deux valeurs propres sont donc strictement positives, et par suite A est bien définie positive.

c) Soit $n \in \mathbb{N}^*$. On suppose que toute matrice de $\mathscr{S}_n(\mathbb{R})$ vérifiant la propriété $\mathcal{P}_n$ est définie positive. On considère une matrice A de $\mathscr{S}_{n+1}(\mathbb{R})$ vérifiant la propriété $\mathcal{P}_{n+1}$ et on suppose par l'absurde que A n'est pas définie positive.

i) Montrer alors que A admet deux vecteurs propres linéairement indépendants associés à des valeurs propres (non nécessairement distinctes) strictement négatives.
Correction : on suppose que A n'est pas définie positive, d'après la question **1)a** cela signifie qu'il existe une valeur propre négative ou nulle. Si celle-ci est nulle alors le déterminant de A est nul, cela contredit l'hypothèse $\mathcal{P}_{n+1}$. La valeur propre est alors strictement négative.
Comme A est diagonalisable, son déterminant est le produit de ses valeurs propres. Comme il est strictement positif, le nombre de valeurs propres comptées avec ordre de multiplicité est pair.
Il y a donc au moins deux valeurs propres strictement négatives. Si elles sont distinctes des vecteurs propres associés sont linéairement indépendants. Si elles sont égales, comme A est diagonalisable le sous espace propre associé est de dimension au moins 2 et donc on peut choisir des vecteurs propres associés sont linéairement indépendants.

ii) En déduire qu'il existe $X \in \mathscr{M}_{n+1,1}(\mathbb{R})$ dont la dernière composante est nulle et tel que $X^\top AX < 0$.
Correction : On commence par faire une remarque : les vecteurs de la question précédente peuvent être choisis orthogonaux si c'est une valeur propre double, sinon ils sont orthogonaux car, d'après le théorème spectral, les sous espaces propres sont orthogonaux deux à deux.
Soient $V_1, V_2 \in M_{n+1,1}(\mathbb{R})$ les vecteurs propres orthonormaux associés aux deux valeurs propres

λ_1, λ_2 strictement négatives de la question précédente. Notons a, b les dernières composantes de V_1 et V_2 respectivement.
Si $ab = 0$, alors l'un des deux vecteurs répond à la question, on obtient $V_1^\top AV_1 = \lambda_1 \|V_1\|^2 = \lambda_1 < 0$ ou $V_2^\top AV_2 = \lambda_2 \|V_2\|^2 = \lambda_2 < 0$.
Si $ab \neq 0$. La dernière composante du vecteur $V = bV_1 - aV_2$ est nulle et ona alors $V^\top AV = b^2 \quad V_1^\top AV_1 + a^2 \quad V_2^\top AV_2 = b^2\lambda_1 + a^2\lambda_2 < 0$.
On conclut donc l'existence d'un vecteur $X \in M_{n+1}(\mathbb{R})$ de dernière composante nulle qui vérifit $X^\top AX < 0$.

iii) Conclure.

Correction : soit X le vecteur trouvé à la question précédente. Il peut s'écrire $X = \begin{pmatrix} X' \\ 0 \end{pmatrix}$ avec $X' \in \mathscr{M}_{n,1}(\mathbb{R})$. On a alors $X^\top AX = X'^\top A^{(n)} X' < 0$. Ce qui contredit l'hypothèse de récurrence. On en déduit que A est définie positive et que le théorème de récurrence s'applique.
Conclusion : pour tout entier n, toute matrice symétrique d'ordre n qui vérifie $\mathcal{P}_n$ est définie positive.

3) Soit A une matrice de $\mathscr{S}_n(\mathbb{R})$. A-t-on l'équivalence suivante :

$$A \text{ est positive } \iff \forall i \in [\![1, n]\!], \det(A^{(i)}) \geqslant 0 \ ?$$

Correction : la matrice $\begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}$ est symétrique non positive car -1 est valeur propre, mais elle vérifie $\forall i \in [\![1, n]\!], \det(A^{(i)}) \geqslant 0$. L'équivalence est donc fausse.

4) Écrire une procédure, dans le langage `Python`, qui prend en entrée une matrice $M \in \mathcal{S}_n(\mathbb{R})$ et qui, en utilisant la caractérisation du I.B, renvoie « true » si la matrice M est définie positive et « false » dans le cas contraire.

II — Étude d'une suite de polynômes

On définit la suite de polynômes $(P_n)_{n \in \mathbb{N}}$ par :

$$\begin{cases} P_0 = 1 \\ \forall n \in \mathbb{N}^*, P_n = [X(X-1)]^n \end{cases}$$

De plus, on pose :

$$\forall (P, Q) \in (\mathbb{R}[X])^2, \quad \langle P|Q \rangle = \int_0^1 P(t)Q(t)\, dt.$$

5) Montrer que l'application $(P, Q) \longmapsto \langle P|Q \rangle$ est un produit scalaire sur $\mathbb{R}[X]$.
Correction : classique. La linéarité de la trace et la bilinéarité du produit matriciel donne la bilinéarité. La propriété de la trace $\mathrm{tr}(A^\top) = \mathrm{tr}(A)$ permet d'avoir la symétrie. En développant directement $\mathrm{tr}(A^\top A) = \sum_{1 \leqslant i,j \leqslant n} a_{i,j}^2$, on obtient le caractère défini positif.

6) On note $P_n^{(n)}$ le polynôme dérivé n fois de P_n.
Déterminer le degré de $P_n^{(n)}$ et calculer $P_n^{(n)}(1)$.
Correction : le polynôme P_n est clairement de degré $2n$. A chaque dérivation le degré diminue d'un donc le degré de de $P_n^{(n)}$ est n. *Pour cette partie de la question il n'y a besoin d'aucun calcul ni de réécriture du polynôme.*
On a $P_n = X^n(X-1)^n$, on va donc utiliser la formule de Leibniz pour dériver n fois le polynôme.
Rappel : $(fg)^{(n)} = \sum_{i=0}^{n} \binom{n}{i} f^{(k)} g^{(n-k)}$.

$$P_n^{(n)} = \sum_{i=0}^{n} \binom{n}{i} \frac{n!}{(n-i)!} X^{n-i} \frac{n!}{i!} (X-1)^i$$

Dans cette somme seul le terme pour $i = 0$ est non nul en 1, donc $P_n^{(n)}(1) = n!$.
Autre méthode : la fonction polynomiale associée à P_n est de classe $\mathscr{C}^{+\infty}$, on peut donc écrire le développement de Taylor-Young à l'ordre n en 1 pour identifier $P_n^{(n)}(1)$.
On a $P_n(X) = (X-1)^n\,(X-1+1)^n = (X-1)^n + o((X-1)^n)$ d'où le résultat.
On définit la suite de polynômes $(L_n)_{n \in \mathbb{N}}$ par :

$$\begin{cases} L_0 = 1 \\ \forall n \in \mathbb{N}^*, L_n = \frac{1}{P_n^{(n)}(1)} P_n^{(n)} \end{cases}$$

7) Soit $n \in \mathbb{N}^*$. Montrer que, pour tout $Q \in \mathbb{R}_{n-1}[X]$, $\langle Q|L_n\rangle = 0$.
Indication : on pourra intégrer par parties.
Correction : Des intégrations par parties succéssives entrainent que *on peut aussi, et c'est fortement conseillé de parler de récurrence)*
$(Q, L_n) = \dfrac{1}{n!}\displaystyle\int_0^1 QP_n^{(n)} = \dfrac{1}{n!}\left[\sum_{k=1}^{n-1}(-1)^k Q^k P_n^{(n-k-1)}\right]_0^1 + \dfrac{(-1)^n}{n!}\int_0^1 Q^{(n)}P_n$, or 0 et 1 sont des racines de P_n de multiplicité n , donc $P_n, P'_n, ..., P_n^{(n-1)}$ s'annulent en 0 et 1, ce qui rend le crochet nul, de plus $deg(Q) \leq n-1$, donc $Q^{(n)} = 0$ et par suite $(Q, L_n) = 0$.

8) a) Pour tout $n \in \mathbb{N}$, on pose : $I_n = \displaystyle\int_0^1 P_n(u)\,du$. Calculer, pour tout $n \in \mathbb{N}$, la valeur de I_n.

Correction : Une succéssion d'intégrations par parties amène à $I_n = \displaystyle\int_0^1 x^n(x-1)^n dx =$
$= -\dfrac{n}{n+1}\displaystyle\int_0^1 x^{n+1}(x-1)^{n-1}dx = ... = (-1)^k\dfrac{n(n-1)...(n-k+1)}{(n+1)(n+2)...(n+k)}\int_0^1 x^{n+k}(x-1)^{n-k}dx = ... =$ $(-1)^n\dfrac{(n!)^2}{(2n)!}\displaystyle\int_0^1 x^{2n}dx.$
donc $I_n = \dfrac{(-1)^n(n!)^2}{(2n+1)!}$.

b) En déduire, pour tout $n \in \mathbb{N}$, la relation : $\langle L_n|L_n\rangle = \dfrac{1}{2n+1}$.

Correction : Une succéssion d'intégrations par parties entraine que $(L_n, L_n) = \dfrac{1}{(n!)^2}\displaystyle\int_0^1 P_n^{(n)}P_n^{(n)} =$ $\dfrac{1}{(n!)^2}\left[\displaystyle\sum_{k=1}^{n-1}(-1)^k P_n^{(n+k)}P_n^{n-1-k}\right]_0^1 + \dfrac{(-1)^n}{(n!)^2}\int_0^1 P_n^{(2n)}P_n$, or le crochet est nul par la même justification faite dans la question $II - C$, de plus $P_n^{2n} = (2n)!$, ce qui entraine que $(L_n, L_n) = \dfrac{(-1)^n(2n)!}{(n!)^2}I_n =$ $\dfrac{(-1)^n(2n)!}{(n!)^2}\dfrac{(-1)^n(n!)^2}{(2n+1)!} = \dfrac{1}{2n+1}$.

9) Déterminer une famille de polynômes $(K_n)_{n\in\mathbb{N}}$ vérifiant les deux conditions suivantes :
i. pour tout $n \in \mathbb{N}$, le degré de K_n vaut n et son coefficient dominant est strictement positif ;
ii. pour tout $N \in \mathbb{N}$, $(K_n)_{0\leqslant n\leqslant N}$ est une base orthonormale de $\mathbb{R}_N[X]$ pour le produit scalaire $\langle\cdot|\cdot\rangle$.
Justifier l'unicité d'une telle famille.
Correction : On a $\forall n > m$, $L_m \in \mathbb{R}_{n-1}[X]$, donc d'après la question $II - C$, $(L_n, L_m) = 0$.
De plus d'après la question précédente $\|L_n\| = \dfrac{1}{\sqrt{2n+1}}$. Ce qui entraine que si on pose
$K_n = \dfrac{L_n}{\|L_n\|} = \sqrt{2n+1}L_n$, alors la famille (K_n) répond à la question, et le coéfficient dominant de K_n est $\sqrt{2n+1}\dfrac{(2n)!}{(n!)^2}$.
Soit (Q_n) une famille vérifiant ces deux conditions. Alors nécessairement $Q_0 = 1 = K_0$. Supposons que $Q_k = K_k$ pour $k \leqslant n$. Alors Q_{n+1} et K_{n+1} dirigent tous deux la droite supplémentaire orthogonale de $R_n[X]$ dans l'espace euclidien $R_{n+1}[X]$ muni du produit scalaire $< .,. >$ donc sont proportionnels. Comme tous deux deux sont de norme 1, on a $Q_{n+1} = \pm K_{n+1}$ et finalement il y a égalité puisque les coefficients dominants sont positifs. Ainsi par récurrence $Q_n = K_n$ pour tout entier n.
Le théorème du procédé d'orthonormalisation de Gram-Schmidt parle d'unicité lorsqu'on rajoute une condition mais ceci est hors programme et donc ne peut être une justification pour cette question. Ce même théorème assure l'existence mais ce n'est pas ce qui est demandé ici. On voulait une base explicite.

10) Calculer K_0, K_1 et K_2.
Correction : $L_0 = 1$, $L_1 = 2X - 1$, $L_2 = 6X^2 - 6X + 1$ ce qui donne $K_0 = 1$, $K_1 = \sqrt{3}(2X - 1)$ et $K_3 = \sqrt{5}(6X^2 - 6X + 1)$.
oui on peut trouver le résultat à l'aide du procédé d'orthonormalisation de Gram-Schmidt mais cela devient un peu long pour peu de points.

III — Matrices de Hilbert

Pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, on définit la matrice H_n par :

$$\forall (i,j) \in [\![1,n]\!]^2, (H_n)_{i,j} = \frac{1}{i+j-1}$$

où $(H_n)_{i,j}$ désigne le coefficient de place (i,j) de la matrice H_n. On note de plus $\Delta_n = \det(H_n)$.

A)*Étude de quelques propriétés de* H_n

11) Calculer H_2 et H_3. Montrer que ce sont des matrices inversibles et déterminer leur inverse.

Correction : $H_2 = \begin{pmatrix} 1 & \frac{1}{2} \\ \frac{1}{2} & \frac{1}{3} \end{pmatrix}$, $H_3 = \begin{pmatrix} 1 & \frac{1}{2} & \frac{1}{3} \\ \frac{1}{2} & \frac{1}{3} & \frac{1}{4} \\ \frac{1}{3} & \frac{1}{4} & \frac{1}{5} \end{pmatrix}$, $H_2^{-1} = \begin{pmatrix} 4 & -6 \\ -6 & 12 \end{pmatrix}$, $H_3^{-1} = \begin{pmatrix} 9 & -36 & 30 \\ -36 & 192 & -180 \\ 30 & -180 & 180 \end{pmatrix}$

l'utilisation de la comatrice ici permettait de faire les calculs plus rapidement que tout autre méthode.

Dans les questions suivantes de **III.A)**, on désigne par n un entier naturel non nul.

12) Montrer la relation :

$$\Delta_{n+1} = \frac{(n!)^4}{(2n)!(2n+1)!}\Delta_n.$$

Indication : on pourra commencer par soustraire la dernière colonne de Δ_{n+1} à toutes les autres.

Correction : *attention à l'utilisation de l'écriture complète de la matrice qui devient vite lourd et surtout risque de ne pas être suffisamment rigoureux.*

En soustrayant la dernière colonne de Δ_{n+1} à toutes les autres on obtient un déterminant dont l'élément d'indice (i,j), avec $j \leqslant n$, est $\dfrac{n+1-j}{(n+i)(i+j-1)}$ et celui d'indice $(i, n+1)$, inchangé, est $\dfrac{1}{n+i}$. $\dfrac{1}{n+i}$ est alors un facteur commun à tous les coefficients de $i$ième ligne. Par multilinéarité du déterminant on le factorise. Même chose pour $(n+1-j)$ qui est un facteur commun à tous les coefficients de la colonne j,pour $j \in [\![1,n]\!]$.

On a alors $\Delta_{n+1} = \dfrac{\prod_{j=1}^{n}(n+1-j)}{\prod_{i=1}^{n+1}(n+i)} D_{n+1} = \dfrac{(n!)^2}{(2n+1)!} D_{n+1}$. D_{n+1} étant un déterminant d'ordre $n+1$ dont la dernière colonne est constituée de 1 et le coefficient d'indice (i,j) avec $j \leqslant n$ est encore $\dfrac{1}{i+j-1}$.

On soustrait alors la dernière ligne à toutes les autres et on factorise de la même façon en inversant les rôles entre lignes et colonnes, mais uniquement sur n colonnes. On a alors $\Delta_{n+1} \dfrac{(n!)^2}{(2n+1)!} \dfrac{(n!)^2}{(2n)!} \Delta_n$. D'où le résultat.

13) En déduire l'expression de Δ_n en fonction de n (on fera intervenir les quantités $c_m = \prod_{i=1}^{m-1} i!$ pour des entiers m adéquats).

Correction : La relation de récurrence précédente conduit à $\triangle_n = \dfrac{((n-1)!(n-2)!...1!)^4}{(2n-1)!(2n-2)!...3!2!}\triangle_1 = \dfrac{c_n^4}{c_{2n}}$.

14) Prouver que H_n est inversible, puis que $\det(H_n^{-1})$ est un entier.

Correction :

- $det(H_n) = \triangle_n = \dfrac{c_n^4}{c_{2n}} > 0$ pour tout $n \in \mathbb{N}$.
- La relation de récurrence $det(H_{n+1}^{-1}) = \dfrac{(2n)!(2n+1)!}{(n!)^4} det(H_n^{-1}) = (2n+1)\begin{pmatrix} 2n \\ n \end{pmatrix}^2 det(H_n^{-1})$ nous invite à utiliser une récurrence simple.
  Pour $n=1$, $det(H_1^{-1}) = 1 \in \mathbb{N}$ et si on suppose que $det(H_n) \in \mathbb{N}$, alors :
  $det(H_{n+1}^{-1}) = (2n+1)\begin{pmatrix} 2n \\ n \end{pmatrix}^2 det(H_n^{-1}) \in \mathbb{N}$, ce qui établit la récurrence.

15) Démontrer que H_n admet n valeurs propres réelles (comptées avec leur ordre de multiplicité) strictement positives.

Correction : Pour tout $k \in [\![1,n]\!]$, $det(H_n^{(k)}) = det(H_k) = \triangle_k > 0$, donc d'après la question $I - B$, la matrice H_n est définie positive, de plus elle est symétrique, donc ses valeurs propres sont en nombre de n et $Sp(H_n) \subset \mathbb{R}^{*+}$.

B) *Approximation au sens des moindres carrés*

On note $\mathscr{C}^0([0,1],\mathbb{R})$ l'espace vectoriel des fonctions continues de $[0,1]$ dans $\mathbb{R}$. On convient d'identifier l'espace $\mathbb{R}[X]$ au sous-espace vectoriel de $\mathscr{C}^0([0,1],\mathbb{R})$ constitué des fonctions polynomiales de $[0,1]$ dans $\mathbb{R}$; ainsi, pour tout entier naturel i, le polynôme X^i est confondu avec la fonction polynomiale définie par : $X^i(t) = t^i$ pour tout $t \in [0,1]$.

On étend à $\mathscr{C}^0([0,1],\mathbb{R})$ le produit scalaire $\langle .|.\rangle$ de la partie II en posant :

$$\forall (f,g) \in (\mathscr{C}^0([0,1],\mathbb{R}))^2, \langle f|g\rangle = \int_0^1 f(t)g(t)\,dt.$$

(On ne demande pas de vérifier qu'il s'agit d'un produit scalaire sur $\mathscr{C}^0([0,1],\mathbb{R})$.)
On note $\|\cdot\|$ la norme associée à ce produit scalaire : pour tout fonction $f \in \mathcal{C}^0([0,1],\mathbb{R})$, on a donc :

$$\|f\| = \sqrt{\langle f|f\rangle}$$

16) Soit $n \in \mathbb{N}$. Montrer qu'il existe un unique polynôme $\Pi_n \in \mathbb{R}_n[X]$ tel que :

$$\|\Pi_n - f\| = \min_{Q\in\mathbb{R}_n[X]} \|Q - f\|.$$

Correction : *il est vraiment indispensable de bien connaître son cours afin de pouvoir répondre rapidement à ce genre de question.* $\mathbb{R}_n[X]$ est un sous espace vectoriel de $C^0([0,1],\mathbb{R})$ de dimension finie, donc le théorème de la projection orthogonale assure que pour tout $f \in C^0([0,1],\mathbb{R})$, il existe $p(f) = \Pi_n \in \mathbb{R}_n[X]$ la projection orthogonale de f sur $\mathbb{R}_n[X]$ tel que $\min\limits_{Q\in\mathbb{R}[X]}(\|Q-f\|) = d(f,\mathbb{R}[X]) = \|\Pi_n - f\|$.

17) Montrer que la suite $(\|\Pi_n - f\|)_{n\in\mathbb{N}}$ est décroissante et converge vers 0.
Correction :
- $\mathbb{R}_{n-1}[X] \subset \mathbb{R}_n[X]$, donc $\min_{Q\in\mathbb{R}_{n-1}[X]}(\|Q-f\|) \geq \min_{Q\in\mathbb{R}_n[X]}(\|Q-f\|)$, c'est à dire $\|\Pi_{n-1}-f\| \geq \|\Pi_n - f\|$ ce qui traduit la décroissance de la suite $(\|\Pi_n - f\|)_n$.
- On a $f \in C^0([0,1],\mathbb{R})$, le théorème de Weistrass assure l'existence d'une suite $(P_n)_n \subset \mathbb{R}[X]$ tel que $\|f - P_n\|_\infty \longrightarrow O$.
  Soit $\varepsilon > 0$, la convergence uniforme précédente entraine qu'il existe $n_0 \in \mathbb{N}$ tel que $\|f - P_{n_0}\|_\infty < \dfrac{\varepsilon}{2}$ et par l'inégalité, $\|f - P_{n_0}\| = (\displaystyle\int_0^1 (f-P_{n_0})^2)^{1/2} \leq \|f - P_{n_0}\|_\infty$, on obtient $\|f - P_{n_0}\| < \dfrac{\varepsilon}{2}$. Si on pose $d_0 = deg(P_{n_0})$, alors pour tout $n \geq max(d_0, n_0)$, $\|f - \Pi_n\| \leq \|f - P_{n_0}\| + \|P_{n_0} - p(P_{n_0})\| + \|p(P_{n_0}) - p(f)\|$, or $P_{n_0} \in \mathbb{R}_n[X]$, donc $p(P_{n_0}) = P_{n_0}$, de plus $\|p(P_{n_0}) - p(f)\| = \|p(P_{n_0} - f)\| \leq \|P_{n_0} - f\|$, ce qui entraine que $\forall n \geq max(n_0, d_0)$ $\|f - \Pi_n\| \leq 2\|P_{n_0} - f\| \leq \varepsilon$.

18) Montrer que H_n est la matrice du produit scalaire $\langle .|.\rangle$ restreint à $\mathbb{R}_{n-1}[X]$, dans la base canonique de $\mathbb{R}_{n-1}[X]$, c'est à dire donc les coefficients sont $\langle X^i|X^j\rangle$.
Correction : Posons $e_k(X) = X^{k-1}$, alors $(e_1, ..., e_n)$ est la base canonique de $\mathbb{R}_{n-1}[X]$ et on a $\langle e_i|e_j\rangle = \displaystyle\int_0^1 e_ie_j = \int_0^1 t^{i+j-2}dt = \frac{1}{i+j-1} = (H_n)_{i,j}$, donc la matrice H_n est la matrice du produit scalaire $(.,.)$ dans la base canonique de $\mathbb{R}_{n-1}[X]$.

19) Calculer les coefficients de Π_n à l'aide de la matrice H_{n+1}^{-1} et des réels $\langle f|X^i\rangle$.

Correction : Posons $\Pi_n = \displaystyle\sum_{j=0}^{n} a_jX^j = \sum_{j=1}^{n+1} a_{j-1}X^{j-1}$.
On sait que $f - \Pi_n \in (\mathbb{R}_n[X])^\perp$, donc $\forall k \in [[1, n+1]]$, $\langle f - \Pi_n|X^{k-1}\rangle = 0$, ce qui donne $\langle f|X^{k-1}\rangle = \displaystyle\sum_{j=1}^{n+1} a_{j-1}\langle X^{j-1}|X^{k-1}\rangle = \sum_{j=1}^{n+1} a_{j-1}(H_{n+1})_{k,j}$, ce qui s'écrit $H_{n+1}\begin{pmatrix} a_0 \\ \vdots \\ a_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \langle f|1\rangle \\ \vdots \\ \langle f|X^n\rangle \end{pmatrix}$ et par suite $\begin{pmatrix} a_0 \\ \vdots \\ a_n \end{pmatrix} = H_{n+1}^{-1}\begin{pmatrix} \langle f|1\rangle \\ \vdots \\ \langle f|X^n\rangle \end{pmatrix}$.

20) Déterminer explicitement Π_2 lorsque f est la fonction définie pour tout $t \in [0,1]$ par : $f(t) = \dfrac{1}{t^2+1}$.
Correction : Dans l'exemple de l'énoncé, les composantes de Π_2 dans la base canonique de $\mathbb{R}_2[X]$ sont donc données par $\begin{pmatrix} 9 & -36 & 30 \\ -36 & 192 & -180 \\ 30 & -180 & 180 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} \frac{\pi}{4} \\ \frac{1}{2}\ln(2) \\ 1-\frac{\pi}{4} \end{pmatrix}$.

IV — Propriétés des coefficients de H_n^{-1}

A) ***Somme des coefficients de*** H_n^{-1}

Pour $n \in \mathbb{N}^*$ et $(i,j) \in [\![1,n]\!]^2$, on note $h_{i,j}^{(-1,n)}$ le coefficient de place (i,j) de la matrice H_n^{-1} et on désigne par s_n la somme des coefficients de la matrice H_n^{-1}, c'est-à-dire :

$$s_n = \sum_{1\leqslant i,j\leqslant n} h_{i,j}^{(-1,n)}$$

21) Calculer s_1, s_2 et s_3. Conjecturer de manière générale la valeur de s_n en fonction de n.
Correction : $s_1 = 1$, $s_2 = 4$, $s_3 = 9$, on conjecture que $s_n = n^2$.

22) Soit $n \in \mathbb{N}^*$.

a) Montrer qu'il existe un unique n-uplet de nombres réels $(a_p^{(n)})_{0 \leqslant p \leqslant n-1}$ vérifiant le système de n équations linéaires à n inconnues suivant :

$$\left\{\begin{array}{ccccccccc} a_0^{(n)} & + & \frac{a_1^{(n)}}{2} & + & \cdots & + & \frac{a_{n-1}^{(n)}}{n} & = & 1 \\ \frac{a_0^{(n)}}{2} & + & \frac{a_1^{(n)}}{3} & + & \cdots & + & \frac{a_{n-1}^{(n)}}{n+1} & = & 1 \\ \vdots & & \vdots & & & & \vdots & & \vdots \\ \frac{a_0^{(n)}}{n} & + & \frac{a_1^{(n)}}{n+1} & + & \cdots & + & \frac{a_{n-1}^{(n)}}{2n-1} & = & 1 \end{array}\right.$$

Correction : Le système en question est un système à n équations, n inconnus de matrice H_n qui est inversible, donc c'est un système de Cramer qui admet une solution unique.

b) Montrer que $s_n = \sum_{p=0}^{n-1} a_p^{(n)}$.

On définit, pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, le polynôme S_n par $S_n = a_0^{(n)} + a_1^{(n)} X + \ldots + a_{n-1}^{(n)} X^{n-1}$. Dans les question suivantes de **IV.A)**, on désigne par n un entier naturel non nul.

Correction : La solution unique du système est donnée par $\begin{pmatrix} a_0^{(n)} \\ \vdots \\ a_{n-1}^{(n)} \end{pmatrix} = H_n^{(-1)} \begin{pmatrix} 1 \\ \vdots \\ 1 \end{pmatrix}$, donc $\forall i \in [[0, n-1]]$ $a_i^{(n)} = \sum_{j=1}^{n} h_{i+1,j}^{(-1,n)}$, ce qui donne en sommant sur les i, $\sum_{i=0}^{n-1} a_i^{(n)} = \sum_{i=1}^{n} a_{i-1}^{(n)} = \sum_{1 \leq i,j \leq n} h_{i,j}^{(-1,n)} = s_n$.

23) Montrer que :

$$\forall Q = \alpha_0 + \alpha_1 X + \ldots + \alpha_{n-1} X^{n-1} \in \mathbb{R}_{n-1}[X], \langle S_n | Q \rangle = \sum_{p=0}^{n-1} \alpha_p$$

Correction : puisque $Q = \sum_{p=0}^{n-1} \alpha_p X^p$, on aura $\langle S_n | Q \rangle = \sum_{p=0}^{n-1} \alpha_p \langle S_n | X^p \rangle$, or en exploitant pour tout $p \in [[0, n-1]]$, la $(p+1)^{\text{ème}}$ ligne du système de la question $IV - A.2 : (a)$, on obtient
$\langle S_n | X^p \rangle = \sum_{k=0}^{n-1} a_k^{(n)} \langle X^p | X^k \rangle = \sum_{k=0}^{n-1} \frac{a_k^{(n)}}{p+k+1} = 1$, ce qui entraine que $\langle S_n | Q \rangle = \sum_{p=0}^{n-1} \alpha_p = Q(1)$.

24) Exprimer s_n à l'aide de la suite de polynômes $(K_p)_{p \in \mathbb{N}}$ définie à la question **9)**.

Correction : En prenant $Q = S_n$ dans la relation précédente, on obtient $\langle S_n | S_n \rangle = \sum_{p=0}^{n-1} a_p^{(n)} = s_n$,or puisque $(K_p)_{0 \leq p \leq n-1}$ est une base orthonormale de $\mathbb{R}_{n-1}[X]$ on a $\langle S_n | S_n \rangle = \|S_n\|^2 = \sum_{p=0}^{n-1} \langle S_n | K_p \rangle^2$, et toujours d'après la relation précédente avec $Q = K_p$, on aura $\langle S_n | K_p \rangle = K_p(1)$, ce qui donne finalement $s_n = \sum_{p=0}^{n-1} (K_p(1))^2$.

25) Pour tout $p \in [\![0, n-1]\!]$, calculer $K_p(1)$.
Correction : On a $K_p = \sqrt{2p+1} L_p$ avec $L_p(1) = 1$ on obtient $K_p(1) = \sqrt{2p+1}$.

26) Déterminer la valeur de s_n.

Correction : $s_n = \sum_{p=0}^{n-1} (K_p(1))^2 = \sum_{p=0}^{n-1} (2p+1) = 2 \sum_{p=1}^{n-1} + n = (n-1)n + n = n^2$.

B) ***Les coefficients de H_n^{-1} sont des entiers***

Pour $n \in \mathbb{N}$, on note $\binom{n}{k}$ le coefficient binomial $\binom{n}{k} = \frac{n!}{k!(n-k)!}$.

27) Soit $p \in \mathbb{N}^*$. Montrer que $\binom{2p}{p}$ est un entier pair.

En déduire que, si $n \in \mathbb{N}^*$ et $p \in [\![1, n]\!]$, alors $\binom{n+p}{p}\binom{n}{p}$ est un entier pair.

Correction : Pour tout $p \in \mathbb{N}^*$, $\left(\begin{array}{c} 2p \\ p \end{array}\right) = 2\left(\begin{array}{c} 2p-1 \\ p \end{array}\right) \in 2\mathbb{N}$.

Soient $n \in \mathbb{N}^*$, $p \in [[1, n]]$, un calcul simple conduit à $\left(\begin{array}{c} n+p \\ p \end{array}\right)\left(\begin{array}{c} n \\ p \end{array}\right) = \left(\begin{array}{c} 2p \\ p \end{array}\right)\left(\begin{array}{c} n+p \\ 2p \end{array}\right) \in 2\mathbb{N}$.

28) Pour tout $n \in \mathbb{N}$, montrer que l'on peut écrire : $K_n = \sqrt{2n+1}\Lambda_n$ où Λ_n est un polynôme à coefficients entiers que l'on explicitera. Parmi les coefficients de Λ_n, lesquels sont pairs ?

Correction : Pour tout $n \in \mathbb{N}$, on a $K_n = \sqrt{2n+1}L_n$ avec $L_n = \dfrac{1}{n!}(P_n^{(n)})$, or $(P_n)^{(n)} = (X^n(X-1)^n)^{(n)} =$ $\left(\displaystyle\sum_{k=0}^{n}\left(\begin{array}{c} n \\ k \end{array}\right)(-1)^{n-k}X^{n+k}\right)^{(n)} = \displaystyle\sum_{k=0}^{n}\left(\begin{array}{c} n \\ k \end{array}\right)(-1)^{n-k}\frac{(n+k)!}{k!}X^k$, ce qui donne

$L_n = \displaystyle\sum_{k=0}^{n}(-1)^{n-k}\left(\begin{array}{c} n+k \\ k \end{array}\right)\left(\begin{array}{c} n \\ k \end{array}\right)X^k$, donc le coefficient constant de L_n est égale à $(-1)^n$ et tous les autres sont pairs grâce à la question précédente.

29) Soit $n \in \mathbb{N}^*$.

a) Calculer $h_{i,i}^{(-1,n)}$ pour tout $i \in [\![1, n]\!]$; on donnera en particulier une expression très simple de $h_{1,1}^{(-1,n)}$ et $h_{n,n}^{(-1,n)}$ en fonction de n.

Correction : Soit $P = (p_{i,j})_{1 \leq i,j \leq n}$ la matrice de passage de la base canonique $\mathcal{B} = (1, X, ..., X^{n-1})$ à la base orthonormée pour le produit scalaire $(.,.)$, $\mathcal{B}' = (K_0, K_1, ..., K_{n-1})$. La matrice du produit scalaire $(.,.)$ est H_n dans la base $\mathcal{B}$, respectivement I_n dans la base $\mathcal{B}'$ et la formule de changement de bases s'écrit $I_n = P^\top H_n P$, ce qui entraine en inversant que $H_n^{-1} = P\ P^\top$, or pour tout $j \in [[0, n-1]]$

$K_j = \sqrt{2j+1}\displaystyle\sum_{k=0}^{j}(-1)^{j-k}\left(\begin{array}{c} j+k \\ k \end{array}\right)\left(\begin{array}{c} j \\ k \end{array}\right)X^k$.

D'où pour tous $i, j \in [[1, n]]$ $p_{i,j} = \sqrt{2j-1}(-1)^{j-i}\left(\begin{array}{c} j+i-2 \\ i-1 \end{array}\right)\left(\begin{array}{c} j-1 \\ i-1 \end{array}\right)$ si $i \leq j$ et $p_{i,j} = 0$ si $i > j$.

Donc pour tout $i \in [[1, n]]$ $\quad h_{i,i}^{(-1,n)} = \displaystyle\sum_{j=i}^{n} p_{i,j}^2 = \sum_{j=i}^{n}(2j-1)\left(\begin{array}{c} j+i-2 \\ i-1 \end{array}\right)^2\left(\begin{array}{c} j-1 \\ i-1 \end{array}\right)^2$.

En particulier pour $i = 1$ et $i = n$, on obtient

$h_{1,1}^{(-1,n)} = \displaystyle\sum_{j=1}^{n}(2j-1) = n^2$ et $h_{n,n}^{(-1,n)} = (2n-1)\left(\begin{array}{c} 2n-2 \\ n-1 \end{array}\right)^2$.

b) Calculer $h_{i,j}^{(-1,n)}$ pour tout couple $(i, j) \in [\![1, n]\!]^2$; en déduire que les coefficients de H_n^{-1} sont des entiers.

Correction : Pour tous $i, j \in [[1, n]]$ $h_{i,j}^{(-1,n)} = \displaystyle\sum_{k=max(i,j)}^{n} p_{i,k}p_{j,k} =$

$= (-1)^{i+j}\displaystyle\sum_{k=max(i,j)}^{n}(2k-1)\left(\begin{array}{c} k+i-2 \\ i-1 \end{array}\right)\left(\begin{array}{c} k-1 \\ i-1 \end{array}\right)\left(\begin{array}{c} k+j-2 \\ j-1 \end{array}\right)\left(\begin{array}{c} k-1 \\ j-1 \end{array}\right)$

Ce qui montre que les $h_{i,j}^{(-1,n)}$ sont des entiers comme produit d'entiers.

c) Montrer que $h_{i,j}^{(-1,n)}$ est divisible par 4 pour tout couple $(i, j) \in [\![2, n]\!]^2$.

Correction : Soient $i, j \in [[2, n]]$, donc pour tout $k \geq max(i, j) \geq 2$, $i-1, j-1, k-1 \in \mathbb{N}^*$, et par suite d'après $(IV - B.1)$, $\left(\begin{array}{c} k+i-2 \\ i-1 \end{array}\right)\left(\begin{array}{c} k-1 \\ i-1 \end{array}\right)$ et $\left(\begin{array}{c} k+j-2 \\ j-1 \end{array}\right)\left(\begin{array}{c} k-1 \\ j-1 \end{array}\right)$ sont pairs, donc leur produit est un multiple de 4, ce qui entraine que $h_{i,j}^{(-1,n)}$ qui est somme de ces produits est aussi un multiple de 4.