Approximations

MP Lycée Clemenceau

1 Recherche de zéro d'une fonction

Dans les deux méthodes qu'on va décrire, on suppose que la fonction f est une fonction continue sur le segment $[a,b]$. On suppose de plus qu'elle est monotone (même cette condition n'est pas nécessaire pour la dichotomie. Enfin on suppose que $f(a)f(b)<0$. Ceci permet de dire, d'après le théorème des valeurs intermédiaires que la fonction s'annule au moins une fois sur le segment.

1.1 Dichotomie

Le principe général est de "découper" le segment en intervalles de longueurs plus petites afin d'encadrer le zéro de la fonction.

Pour cela on calcule la valeur de la fonction en $\frac{a+b}{2}$.

On a alors plusieurs cas :

- $f\left(\frac{a+b}{2}\right)=0$: génial, on a directement trouver une valeur cherchée. Pourquoi aller plus loin ?
- $f(a)f\left(\frac{a+b}{2}\right)<0$: d'après le théorème des valeurs intermédiaires il y a un zéro dans l'intervalle $\left[a,\frac{a+b}{2}\right]$. On peut alors recommencer la méthode sur cet intervalle.
- $f(b)f\left(\frac{a+b}{2}\right)<0$: on a forcément cette inégalité à moins de s'être trompé dès le début. d'après le théorème des valeurs intermédiaires il y a un zéro dans l'intervalle $\left[\frac{a+b}{2},b\right]$. On peut alors recommencer la méthode sur cet intervalle

On définit donc deux suites $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ et $(b_n)_{n\in\mathbb{N}}$ par :

★ $a_0=a$ et $b_0=b$

★ pour $n\in\mathbb{N}$

∋ si $f\left(\frac{a_n+b_n}{2}\right)=0$ on arrête l'algorithme.

∋ si $f(a)f\left(\frac{a+b}{2}\right)<0$ alors $\begin{cases} a_{n+1}=a_n \\ b_{n+1}=\frac{a_n+b_n}{2}\end{cases}$

∋ sinon (on a forcément $f(b)f\left(\frac{a+b}{2}\right)<0$) alors $\begin{cases} a_{n+1}=\frac{a_n+b_n}{2} \\ b_{n+1}=b_n\end{cases}$

On a pour tout entier n, $b_{n+1}-a_{n+1}=\frac{1}{2}(b_n-a_n)$. On en déduit que, pour tout entier n, $(b_n-a_n)=\frac{1}{2^n}(b_0-a_0)$, ce qui tend vers 0 lorsque n tend vers ∞. On a de plus, pour tout $n\in\mathbb{N}$, $a_n\leq\frac{a_n+b_n}{2}\leq b_n$. La suite $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est donc croissante et la suite $(b_n)_{n\in\mathbb{N}}$ décroissante.

Les suites sont alors des suites adjacentes, elles convergent donc vers une limite commune c. Comme f est continue, par passage à la limite de $f(a_n)f(b_n)\leq 0$ on a $f^2(c)\leq 0$ donc $f(c)=0$.

Comme on a, pour tout $n\in\mathbb{N}$, $a_n\leq c\leq b_n$ et $(b_n-a_n)=\frac{1}{2^n}(b_0-a_0)$, pour obtenir une valeur approchée de c à ε près il suffit de prendre n tel que $\frac{1}{2^n}(b_0-a_0)\leq\varepsilon$

1.2 Méthode de Newton

Le principe général de cette méthode est d'approcher la fonction par son développement de Taylor à l'ordre 1.

On considère un point $x_0 \in [a,b]$. L'équation de la tangente à la courbe représentative de f au point d'abscisse x_0 est alors $y = f(x_0) + f'(x_0)(x - x_0)$. Il est nécessaire de choisir une valeur de x_0 telle que $f'(x_0) \neq 0$ sinon la tangente ne coupe pas l'axe des abscisses. On a alors l'abscisse du point d'intersection entre la tangente et l'axe des abscisses qui est $x_1 = x_0 - \dfrac{f(x_0)}{f'(x_0)}$.

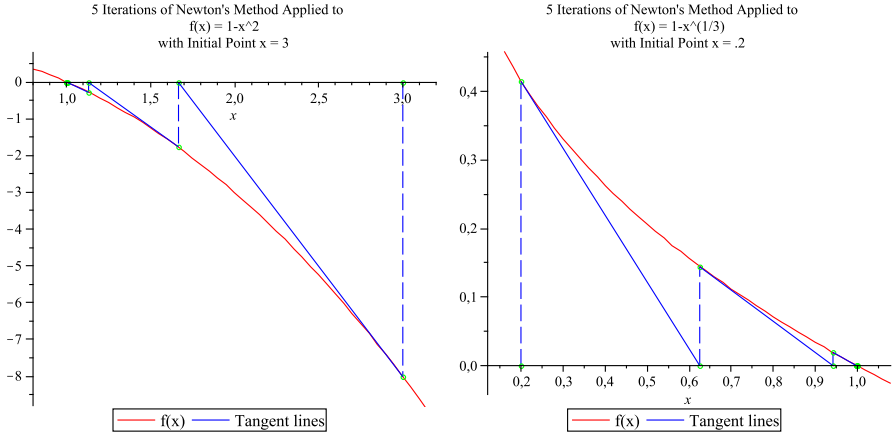
Une autre contrainte est qu'il faut que x_1 soit encore dans l'intervalle $[a,b]$.

On va s'intéresser au cas particulier où f est de classe C^2 et que la dérivée seconde ne s'annule jamais. La fonction sera alors convexe ou concave. On choisira un intervalle où elle est monotone.

On considère alors x_0 tel que $f(x_0)f''(x_0) \geq 0$.

Avec ces hypothèses on peut montrer que la suite alors construite est monotone. (Démonstration laissée au lecteur : l'idée générale est d'utiliser la propriété de convexité avec la tangente).

De plus, de part la position de la tangente par rapport à la courbe, la suite est majorée ou minorée par le zéro de f. On en déduit que la suite converge et que la seule limite possible est ce zéro.



Dans le cas où f est de classe C^2 sur $[a,b]$, il existe deux réels M et N strictement positifs tels que $\sup\limits_{[a,b]}(|f''|) \leq M$ et $\inf\limits_{[a,b]}(|f'|) \geq N$.

Soit $c \in [a,b]$ tel que $f(c) = 0$. On a, d'après l'inégalité de Taylor-Lagrange :

$$|f(c) - f(x_n) - f'(x_n)(c - x_n)| \leq \frac{(c - x_n)^2}{2} \sup_{[a,b]} |f''|$$

On en déduit, après calculs et à l'aide de la définition de la suite $(x_n)_{n \in \mathbb{N}}$,

que $|c - x_{n+1}| \leq |c - x_n|^2 \dfrac{M}{2N}$.

On en déduit que $|c - x_n| \leq |c - x_0|^{2^n} \left(\dfrac{M}{2N}\right)^{2^n - 1}$.

On obtient ainsi une condition de convergence : $|c - x_0| \frac{M}{2N} < 1$, et on peut remarquer que celle-ci sera rapide.

2 Calculs approchés d'intégrales

Dans les deux méthodes qui suivent, on considère la subdivision régulière suivante :

$$c_k = a + k.\frac{b-a}{n} \qquad k \in \{0, 1, .., n\}$$

2.1 Méthode des rectangles

Définition 1 *La méthode des rectangles appliquée à* $\int_a^b f$ *relativement à la subdivision* $\{c_0, .., c_n\}$ *consiste à prendre pour valeur approchée de cette intégrale*

$$R_n = \frac{b-a}{n}\sum_{k=0}^{n-1} f(c_k) \quad ou \; R'_n = \frac{b-a}{n}\sum_{k=1}^{n} f(c_k)$$

Cela revient donc à prendre pour valeur approchée, une somme de Riemman

Proposition 1 *L'erreur commise en prenant cette valeur approchée, est majorée par :*

$$\left| R_n - \int_a^b f \right| \leq \frac{(b-a)^2 \sup_{[a,b]} |f'|}{n}$$

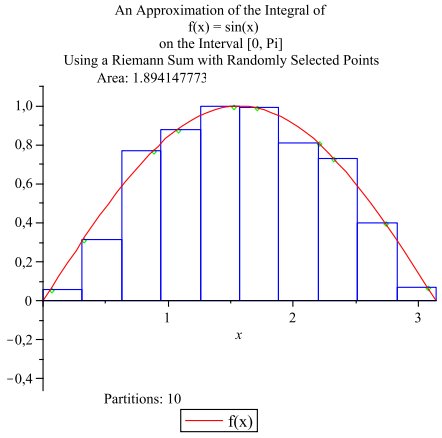
Démonstration par inégalité des accroissements finis :
On commence par découper l'intégrale suivant le subdivision :

$$\int_a^b f(x).dx = \sum_{k=0}^{n-1} \int_{c_k}^{c_{k+1}} f(x).dx$$

On a alors :

$$\begin{aligned} \int_a^b f(x).dx - R_n &= \sum_{k=0}^{n-1} \int_{c_k}^{c_{k+1}} f(x).dx - \frac{b-a}{n}\sum_{k=0}^{n-1} f(c_k) = \sum_{k=0}^{n-1} \left(\int_{c_k}^{c_{k+1}} f(x).dx - \frac{b-a}{n}.f(c_k) \right) \\ &= \sum_{k=0}^{n-1} \left(\int_{c_k}^{c_{k+1}} f(x).dx - \int_{c_k}^{c_{k+1}} f(c_k).dx \right) = \sum_{k=0}^{n-1} \int_{c_k}^{c_{k+1}} (f(x) - f(c_k)).dx \end{aligned}$$

Car pour tout k on a $\int_{c_k}^{c_{k+1}} dx = \frac{b-a}{n}$.



2.2 Méthode des trapèzes

Définition 2 *la méthode des trapèzes appliquée à* $\int_a^b f$ *relativement à la subdivision* $\{c_0, .., c_n\}$ *consiste à prendre pour valeur approchée de cette intégrale :*

$$T_n = \frac{b-a}{n}\left(\frac{f(a)+f(b)}{2} + \sum_{k=1}^{n-1} f(c_k) \right)$$

Proposition 2 *Erreur :*

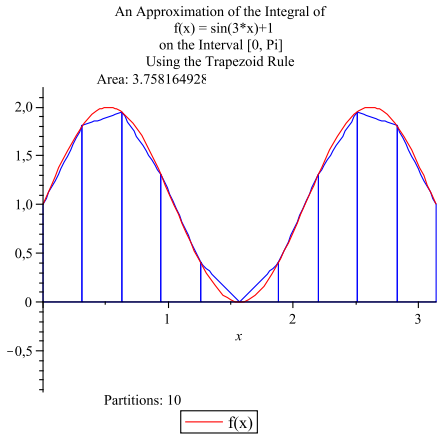
$$\left| T_n - \int_a^b f \right| \leq \frac{(b-a)^3 \sup |f''|}{12.n^2}$$

Démonstration par intégration par partie de

$$\int_\alpha^\beta (x-\alpha)(x-\beta).f''(x)dx$$

et on arrive à

$$\left| \int_\alpha^\beta f - \frac{\beta-\alpha}{2}(f(\alpha)+f(\beta)) \right| \leq \frac{(\beta-\alpha)^3 \sup |f''|}{12}$$



3 Equations différentielles d'ordre 1

Méthode d'Euler. Résolution numérique d'équations différentielles du type : $y(x_0) = y_0$, $y_0 = f(x, y)$ où y désigne une fonction réelle inconnue de la variable réelle x et f est une fonction donnée définissant l'équation. La résolution est généralement un problème difficile. On impose à f une condition de régularité minimale : f est continue. Autrement dit, pour tous $(x0, y0)$ et $\varepsilon > 0$, il existe $h_1 > 0$ et $h_2 > 0$ tels que : $|x - x_0| \leq h_1$, $|y - y_0| \leq h2 \Rightarrow |f(x, y) - f(x0, y0)| < \varepsilon$ La plupart du temps f est au moins de classe C^1. On supposera qu'un théorème d'existence et d'unicité s'applique, c.à.d. qu'il existe une unique fonction φ définie sur une intervalle I telle que : $\varphi(x_0) = y_0$ et pour tout x dans I, $\varphi'(x) = f(x, \varphi(x))$. Certaines équations n'ont pas de solution s'exprimant à l'aide de fonctions usuelles, même lorsque f est simple. Dans certains cas, on obtient une intégrale première, c'est à dire une relation de la forme $F(x, y) = 0$ qui lie les valeurs de x et $y = \varphi(x)$. Il existe des algorithmes qui permettent de calculer y en fonction de x. Une autre façon de résoudre une telle équation sur un intervalle I, consiste à approcher une solution φ par le tableau de ses valeurs $(x_j, y_j)_{0 \leq j \leq n}$ où $(x_j)_{0 \leq j \leq n}$ est une suite d'éléments de I et pour tout j : $y_j = \varphi(x_j)$. Le calcul s'effectue de proche en proche : partant de (x_0, y_0), en chaque point (x_j, y_j) du plan, on progresse dans la direction y_0 (égale à $f(x, y)$) de la tangente à une courbe solution, jusqu'à un point (x_{j+1}, y_{j+1}). La distance de progression est à évaluer de manière à ne pas trop s'écarter de la solution. Méthode d'Euler : nous définissons un pas de progression, h et pour tout j, nous posons $x_{j+1} = x_j + h$ et approchons y_{j+1} par le développement limité à l'ordre 1 : $y_{j+1} = y_j + y'(x_j)(x_{j+1} - x_j)$ soit $yj + 1 = yj + f(xj, yj)h$ Théoriquement, diminuer le pas améliore la précision. En fait le nombre d'itération augmente et, par suite, l'erreur cumulée aussi. Le comportement peut aussi varier d'une équation à l'autre.

Autres méthodes :

– Méthode d'Euler modifiée : $y_{i+1} = y_i + h(f(x_i, y_i) + f(x_{i+1}, y_i + hf(x_i, y_i)))/2$.

– Méthode de Runge Kutta : $y_{i+1} = y_i + h(v_1 + 4v_2 + 4v_3 + v_4)/6$ avec $\begin{cases} v_1 = f(x_i, y_i) \\ v_2 = f(x_i + h/2, yi_+ hv_1/2) \\ v_3 = f(x_i + h/2, y_i + hv_2/2) \\ v_4 = f(x_i + h, y_i + hv_3) \end{cases}$

– Méthode des développements de Taylor. . .